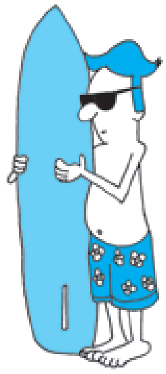


Jedno izvođenje trigonometrijskih formula

Antun Ivanković, Ilok

U nastavi trigonometrije obično se najprije dokazuju adicijske formule, pa se iz njih pogodnim transformacijama dobiju druge.

U ovom ćemo članku koristeći vektorsku metodu pokazati kako se iz identičnih transformacija zbroja u produkt dobiju druge trigonometrijske formule (adicijske, formule dvostrukog i polovičnog kuta i sve druge). Mislim da bi bilo dobro učenicima pokazati i ovaj pristup, ili neki drugi, kako bi bolje uvidjeli ekvivalentnost i univerzalnost trigonometrijskih formula.

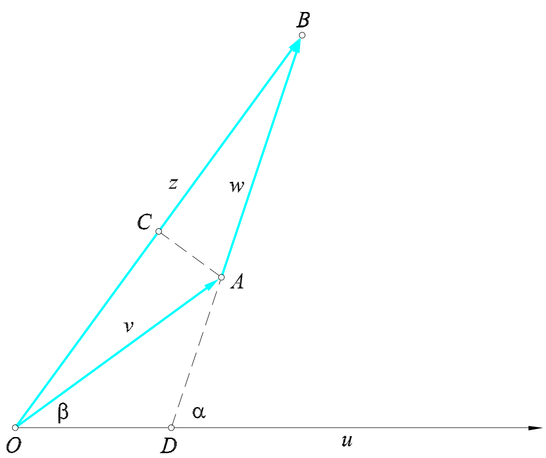
Najprije dokažimo identitet:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

iz kojeg ćemo dokazati ostale.

1. Identične transformacije zbroja u produkt

Poslužimo se slikom:



Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AB}$ dva jedinična vektora postavljena pod kutovima β i α prema polupravcu x. Vrijedi:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}.$$

Po teoremu o projekciji vektora na os, imamo

$$|\overrightarrow{AB}| \cos\alpha + |\overrightarrow{OA}| \cos\beta = |\overrightarrow{OB}| \cos \sphericalangle uOB.$$

Kako je $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = 1$ i $\sphericalangle uOB = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$[1], prethodna jednakost postaje:

$$\cos\alpha + \cos\beta = |\overrightarrow{OB}| \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Kako je kut

$$\sphericalangle uOB = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

imamo dalje

$$|\overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OA}| \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

te uvodeći $|\overrightarrow{OB}|$ u prethodnu jednadžbu, imamo

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{1.1}$$

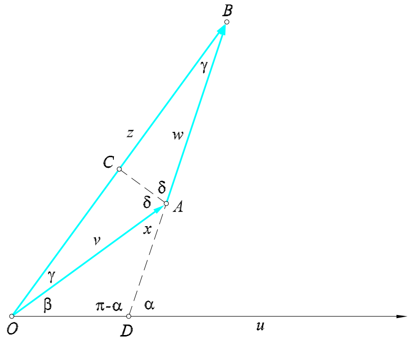
što predstavlja poznatu transformacijsku formulu zbroja u produkt.

Budući da se u dokazu ove formule koristimo stavkom o projekciji vektora na os, zaključujemo da formula vrijedi za svaki izbor kutova α i β.

Ostale transformacijske formule dobivamo pogodnim supstitucijama u (1.1).

---

[1] Promotrimo sliku:



Iz trokuta $\triangle OPB$ i $\triangle OAQ$ (jednakokračan) imamo relacije:

$$\beta + 2\gamma + \pi - \alpha = \pi,$$
$$\gamma + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi,$$
$$x + 2\delta = \pi.$$

Rješavanjem sustava dobivamo $x = 2\gamma$ i $\beta + x = \alpha$, tj. $\gamma = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Dalje imamo

$$\sphericalangle uOB = \beta + \gamma = \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\beta+\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

što je trebalo dokazati.

Ako umjesto β stavimo $\beta+\pi$, dobivamo

$$\cos\alpha+\cos(\pi+\beta)=2\cos\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\Big),$$

što daje

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1.2}$$

Isto tako, uzimajući $\frac{\pi}{2}-\alpha$ umjesto α, a $\frac{\pi}{2}-b$ umjesto β, dobivamo

$$\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big)+\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\beta\Big)=2\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\Big(-\frac{\alpha-\beta}{2}\Big),$$

tj., dobivamo

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1.3}$$

I napokon, ako u (1.3) umjesto β stavimo $-\beta$, dobivamo

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1.4}$$

Sve formule vrijede za svako $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

2. Trigonometrijske funkcije polovičnog kuta

Ako u (1.2) stavimo da je $\beta=0$, slijedi

$$\cos\alpha-\cos 0=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

što daje

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha,$$

odnosno

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \tag{2.1}$$

za svako $\alpha\in\mathbf{R}$.

Isto tako, ako u (1.1) stavimo da je $\beta=0$, dobivamo

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha,$$

tj.

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{2.2}$$

za svako $\alpha\in\mathbf{R}$.

Nastavak na str. 170.

Nastavak sa str. 167.

Formule (2.1) i (2.2) su formule sinusa i kosinusa polovičnog kuta. Njihovim dijeljenjem dobivamo formule polovičnog kuta tangensa i kotangensa:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \tag{2.3}$$

za svako $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{(2k+1)\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$ i

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, \tag{2.4}$$

za svako $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$.

3. Trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta

Stavimo li u (1.3) 2α umjesto α i $\beta=0$, dobivamo

$$\sin 2\alpha+\sin 0=2\sin\frac{2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha}{2},$$

tj.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{3.1}$$

Isto tako, stavljajući u (1.1) iste supstitucije, dobivamo formulu za kosinus dvostrukog kuta

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1. \tag{3.2}$$

Dalje imamo

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{3.3}$$

za $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$, gdje je $k\in\mathbf{Z}$.

Isto se tako dobije i

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}, \tag{3.4}$$

za $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$, za $k\in\mathbf{Z}$.

4. Identične transformacije produkta sinusa i kosinusa u zbroj

Ako u jednakosti (1.1), (1.2), (1.3) i (1.4) stavimo supstitucije $\alpha=p+q$ i $\beta=p-q$, dobijemo transformacijske formule produkta u zbroj:

$$\cos p\cos q=\frac{1}{2}[\cos(p+q)+\cos(p-q)], \tag{4.1}$$

$$\sin p\sin q=\frac{1}{2}[\cos(p-q)-\cos(p+q)], \tag{4.2}$$

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2}[\sin(p+q) + \cos(p-q)], \tag{4.3}$$

$$\cos p \sin q = \frac{1}{2}[\sin(p+q) - \cos(p-q)]. \tag{4.4}$$

5. Adicijske formule

Zbrajanjem jednakosti (4.3) i (4.3) dobivamo

$$\sin(p+q) = \sin p \cos q + \cos p \sin q, \tag{5.1}$$

a oduzimajući (4.4) od (4.3) dobivamo

$$\sin(p-q) = \sin p \cos q - \cos p \sin q. \tag{5.2}$$

Analogno prethodnom, imamo i druge dvije formule:

$$\cos(p-q) = \cos p \cos q + \sin p \sin q, \tag{5.3}$$

$$\cos(p+q) = \cos p \cos q - \sin p \sin q. \tag{5.4}$$

Dijeleći (5.1) s (5.4), imamo

$$\operatorname{tg}\left(p+q\right) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p+q)} = \frac{\sin p \cos q + \cos p \sin q}{\cos p \cos q - \sin p \sin q} = \frac{\dfrac{\sin p \cos q + \cos p \sin q}{\cos p \cos q}}{\dfrac{\cos p \cos q - \sin p \sin q}{\cos p \cos q}} = \frac{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q}, \tag{5.5}$$

za sve $p, q \in \mathbf{R}$ za koje vrijedi $\cos(p+q) \neq 0$, tj. $p+q \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Isto tako imamo i formule

$$\operatorname{tg}(p-q) = \frac{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q}{1 + \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q}, \tag{5.6}$$

za sve $p, q \in \mathbf{R}$ za koje vrijedi $\cos(p-q) \neq 0$, tj. $p-q \neq \frac{\pi}{2} k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

$$\operatorname{ctg}(p+q) = \frac{\operatorname{ctg} p \operatorname{ctg} q - 1}{\operatorname{ctg} p + \operatorname{ctg} q}, \tag{5.7}$$

za $p+q \in k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

$$\operatorname{ctg}(p-q) = \frac{\operatorname{ctg} p \operatorname{ctg} q + 1}{\operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q}, \tag{5.8}$$

za $p-q \in k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3 – udžbenik i zbirka zadataka za 3. r. gimnazije*, Element, Zagreb.
[2] Đ. Dugošija, L. Milin, Ž. Ivanović, *Trigonometrija – Teorija i rešeni zadaci*, Naučna knjiga, Beograd.
[3] Đ. Kurepa, S. Škreblin, J. Brečević, *Matematika za treći razred gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb.