nužno je položiti samo jednu izabranu grupu kolegija. Postoje didaktički kolegiji o pojedinom matematičkom području (npr. didaktika algebre, didaktika geometrije, ...).

Studij završava prvim državnim ispitom. Od kandidata se zahtijeva: znanje o znanstvenoj pozadini školske matematike, stručno didaktička znanja o teoriji učenja, temeljito znanje iz dva područja matematike (koja su definirana prilikom opisa glavnog studija) i stručno didaktička znanja iz pojedinih područja matematike.

Studij za nastavnika matematike na Gymnasium provodi se u saveznoj njemačkoj državi Rheinland–Pfalz na sveučilištima u Kaiserslautern, Mainz i Trier. Ovdje opisujemo studij sa sveučilišta u Trieru.

Studij je dvopredmetni, tj. uz matematiku treba izabrati još jedno područje.

Mora se još paralelno studirati i pedagogija. Kao i u prethodnom primjeru studij se dijeli na osnovni studij i glavni studij. Osnovni studij traje četiri semestra. Program studija (samo matematički kolegiji) izgleda ovako:

U zimskom semestru se izborni kolegiji biraju iz skupine: Analiza 3, Teorija vjerojatnosti 1, Operacijska istraživanja 1 i Račun vjerojatnosti 1, a u ljetnom semestru iz grupe kolegija: Numerička matematika 1, Teorija funkcija, Teorija vjerojatnosti 2 i Račun vjerojatnosti 2.

Glavni studij za buduće nastavnike na Gymnasium traje četiri semestra. Ako je matematika prvi izabrani predmet (dvopredmetni studij!) studij je teži, te se na kraju treba izraditi diplomski rad. Ukupan broj sati tjedno je 28, koji su raspoređeni na sljedeći način:

- Tjedno 20 sati iz tri područja sa sljedećeg popisa: analiza i opća topologija, geometrija, algebra i teorija brojeva, informatika ili numerička matematika, stohastika, te osnove matematike ili matematička logika ili povijest matematike;
- Dva seminara po 2 sata;
- Stručna didaktika 4 sata.

Studenti trebaju sudjelovati na dva praktikuma koji se održavaju u srednjim školama. Prvi praktikum traje dva tjedna. To su prije svega hospitacije. Drugi praktikum traje četiri tjedna, a sastoji se većinom od uvježbavanja držanja nastave.

Studij za nastavnika matematike na Gymansium završava prvim državnim ispitom. Na ispitu se traži razumijevanje metoda i problema iz šest područja koja su navedena prilikom opisa glavnog studija, a produbljena znanja iz dva područja. Zahtijeva se poznavanje pojmova stručne didaktike. Ispit se sastoji od pismenog dijela (šest sati!) i usmenog dijela, te ispita iz stručne didaktike.

Na kraju navodimo usporedbe njemačkog i našeg studija.

- U Njemačkoj su odvojeni studiji za nastavnika matematike osnovne škole i nastavnika matematike srednje škole. Štoviše, studiji se odvijaju na različitim institucijama.
- Studiji su dvopredmetni, ili čak tropredmetni. Koji predmet se može još studira-

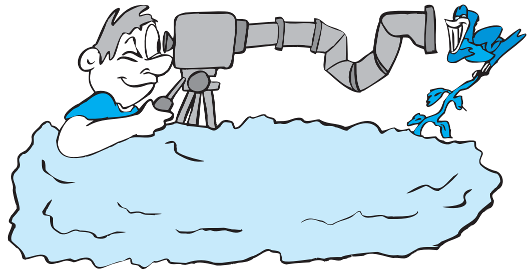
	Kolegij	Sati pred. tjedno	Sati vježbi tjedno	Sati seminara tjedno
1. semestar	Analiza 1 Linearna algebra 1	5 4	3 2	
Između semestara	Fortran			
2. semestar	Analiza 2 Linearna algebra	4 4	2 2	
3. i 4. semestar	Obavezni izborni kolegiji Proseminar	8		 2

ti zajedno s matematikom ovisi o ponudi sveučilišta. Drugi predmet ne mora biti samo informatika ili fizika, već i npr. ruski jezik ili oblikovanje tekstila. Matematika može biti prvi predmet, ali i ne mora. (Prvi predmet se "strože" tretira).

- Studiji su u pravilu podijeljeni na dva dijela: osnovni studij (3 ili 4 semestra; svi kolegiji su obavezni) i glavni studij (3 ili 4 semestra; većina kolegija je izborna).
- Na početku studija u Njemačkoj postoje "mosni" kolegiji koji imaju za cilj pomoći studentima da ponove i utvrde srednjoškolsko gradivo, te ih što bolje pripreme za nastavak studija. Kod nas postoje slični kolegiji pod nazivom Elementarna matematika. No, u Njemačkoj ti kolegiji imaju veću satnicu, te uz njih obavezno dolaze i seminari.
- U pravilima studiranja nije eksplicitno napisano kako se provede ispiti, tj. postoji li ispit iz svakog upisanog kolegija. No, posebna pažnja je posvećena međuispitu nakon četiri semestra studija, prvom državnom ispitu i drugom državnom ispitu.
- Velika važnost se pridaje seminarima. Studenti obavezno moraju prisustvovati seminarima i aktivno u njima sudjelovati.
- Studenti u Njemačkoj imaju više praktične nastave u školama. Naši studenti moraju odslušati 10 sati predavanja mentora u osnovnoj i srednjoj školi, te održati jedan probni i jedan ispitni sat.
- Postojeći program studija na PMF–MO u Zagrebu najsličniji je, bolje reći usporediv je samo s njemačkim programom studija za nastavnika na Gymnasium.

Nažalost, kod nas ne postoji adekvatni oblik suradnje između nastavnika matematike u osnovnim i srednjim školama, te fakulteta. Smatramo da bi pri izradi novog programa studija za nastavnika matematike bilo vrlo važno čuti mišljenje ljudi iz prakse. Glavni cilj ovog članka je zapravo poziv na suradnju. Biti ćemo zahvalni svakome tko nam uputi bilo kakav prijedlog ili kritiku.

e-mail: `bruckler@math.hr`
`vukovic@math.hr`



Zapažanja

Mirko Franić, Trogir

Kao član Općinskog i Županijskog povjerenstva za provedbu natjecanja iz matematike sudjelovao sam na više natjecanja te imao mogućnost punog uvida u zadatke i njihova rješenja. Evo nekih mojih zapažanja.

* * *

Na Općinsko–gradskom natjecanju 1. ožujka 1997. god. za 1. razred postavljen je sljedeći zadatak:

1. Neka su x i y cijeli brojevi. Dokaži da je tada $3x+y$ djeljivo s 13 ako i samo ako je $5x+6y$ djeljivo s 13.

Ponuđena su rješenja:

Prvo rješenje. Neka je $3x+y=A$ i $5x+6y=B$. Promatramo izraz:

$$nA+mB=(3n+5m)x+(n+6m)y.$$

Izaberimo cijele brojeve m i n tako da je desna strana sigurno djeljiva s 13, tj.

$$\begin{array}{rcl} 13 & \mid & 3n+5m \\ 13 & \mid & n+6m. \end{array}$$

Najjednostavnije rješenje je $n=1$, $m=2$ za koje je $A+2B=13(x+y)$.

Budući da 1 i 2 nisu djeljivi s 13, slijedi da ako je jedan od A ili B djeljiv s 13, onda je i drugi djeljiv s 13.

Drugo rješenje – izravno. Pretpostavimo da je $3x+y=13k$. Tada je npr. $5x+6y-6\cdot(13k)=-13x$, pa je i $5x+6y$ djeljivo s 13.

S druge strane, ako je $5x+6y=13l$, onda je $3x+y+2\cdot(13l)=13(x+y)$. Zato je i $3x+y$ djeljlivo s 13.

Zadatak se "elegantno" može riještiti i ovako:

$\boxed{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned} 13\mid 3x+y &\Longrightarrow 3x+y=13k \\ &\Longrightarrow y=13k-3x \\ 5x+6y&=5x+6\cdot(13k-3x) \\ &=5x+6\cdot 13k-18x \\ &=6\cdot 13k-13x=13(6k-x). \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$\begin{aligned} 13\mid 5x+6y &\Longrightarrow 5x+6y=13l \\ &\Longrightarrow y=\frac{13l-5x}{6} \\ 3x+y&=3x+\frac{13l-5x}{6} \\ &=\frac{18x+13l-5x}{6}=\frac{13(x+l)}{6} \\ &\Longrightarrow 6\cdot(3x+y)=13(x+l) \\ &\Longrightarrow 13\mid(3x+y). \end{aligned}$$

Ili: pretpostavimo $13 \mid (3x+y)$. Tada imamo $\boxed{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned} 3(5x+6y) &= 15x+18y \\ &= 5(3x+y)+13y \\ &\Longrightarrow 13 \mid (5x+6y). \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ obrnuto, ako je $13 \mid 5x+6y$, onda

$$\begin{aligned} 5(3x+y) &= 15x+5y \\ &= 3(5x+6y)-13y \\ &\Longrightarrow 13 \mid (3x+y). \end{aligned}$$

* * *

Na Općinsko–gradskom natjecanju 6. ožujka 1998. god. za 1. razred postavljen je zadatak:

1. U trokutu ABC je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Dokažite da je duljina t_a težišnice iz vrha A jednaka

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Ponuđena su rješenja:

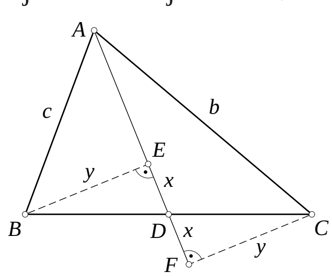
Prvo rješenje. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$, točke E i F nožišta okomica iz točaka B i C na težišnicu t_a. Trokuti BED i CFD su sukladni. Označimo $|DE| = |DF| = x$ i $|CF| = |BE| = y$. Iz pravokutnih trokuta ABE i AFC je

$$(t_a - x)^2 + y^2 = c^2,$$
$$(t_a + x)^2 + y^2 = b^2.$$

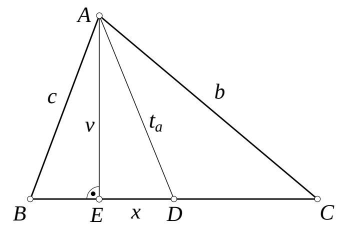
Zbrajanjem se dobiva $2t_a^2 + 2x^2 + 2y^2 = b^2 + c^2$. Iz pravokutnog trokuta DFC je $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, pa je

$$2t_a^2 + 2\cdot\frac{a^4}{4} = b^2 + c^2,$$

odakle slijedi tražena jednakost.



Drugo rješenje. Neka je $\overline{AD}$ težišnica duljine t_a, $\overline{AE}$ visina duljine v_a, $|ED| = x$.



$$\begin{aligned} \triangle AED &\Rightarrow t_a^2 = v_a^2 + x^2 \\ \triangle AEB &\Rightarrow v_a^2 = c^2 - \left(\tfrac{a}{2} - x\right)^2 \\ \triangle AEC &\Rightarrow v_a^2 = b^2 - \left(\tfrac{a}{2} + x\right)^2. \end{aligned}$$

Iz dviju zadnjih jednakosti dobivamo

$$x = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

Uvrštavanjem u prvu jednakost slijedi

$$t_a^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2),$$

a odavde slijedi jednakost koju je trebalo dokazati.

No, zadatak je još jednostavnije moguće riješiti i ovako:

U paralelogramu vrijedi

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2),$$

gdje su a, b duljine stranica, d_1, d_2 duljine dijagonala.

Sada je prema donjoj slici

$$\begin{aligned} (2t_a)^2 + a^2 &= 2(b^2 + c^2) \\ 4t_a^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 \qquad (1) \\ t_a^2 &= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ \Longrightarrow\ t_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Ovog će se sjetiti svaki učenik koji je konstruirao trokut kojemu su zadane duljine dvije stranice i težišnice do treće stranice.