Boškovićevo izvođenje Heronove formule

Dr. Vladimir Varićak

Bošković se spočetka naročito bavio astronomijom. Stoga nije nikakvo čudo, da on u svojoj prvoj matematičkoj radnji raspravlja o sfernoj trigonometriji. Sferna trigonometrija je i nastala poradi astronomije, pa je u početku i bila samo odsječak njezin.

Bošković se konstruktivnim razrješavanjem sfernih trokuta bavi u dvije radnje: *Trigonometriae sphaericae constructio* (Rim — 1737) i *Construction plane de la Trigonometrie sphérique (Opera* t. III, Bassan — 1785). God. 1745 izašla je u Rimu Boškovićeva radnja *Trigonometria sphaerica*, a Boškovićevo djelo *Elementorum universae matheseos*, t. I, donosi trigonometriju. Definicije goniometrijskih funkcija su onakve, kako ih je postavio *Raeticus* oko polovine 16. stoljeća. Ne pazi na razliku u predznaku. Relacije koje postoje između dijelova trokuta, ne izražava formulama, nego ih iskazuje riječima. No to su sve nedostaci njegova vremena. U svezi s naslovom treba nam spomenuti raspravicu "*Demonstrations simples de quelques beaux théorèmes appartenants aux triangles*", uvrštenu u V. svesku djela izdanih u Bassanu god. 1785. Tu Bošković iz tri stranice trokuta određuje kutove, pa polumjer upisanog kruga i površinu trokuta. On drži, da je njegov način izvođenja jednostavniji od onih, koji se obično nalaze u knjigama, pa ga stoga preporučuje piscima elementarnih djela.

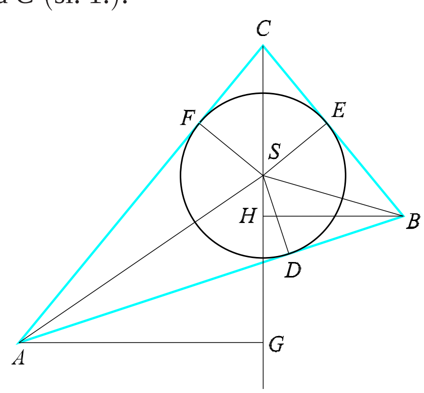
Prvi poučak, što ga Bošković izvodi za ravni trokut (on to čini i za sferni) piše u obliku proporcije

$$R^2 : \sin^2 \frac{1}{A} :: AB \cdot AD : M \cdot N,$$

R je sinus totus tj. $\sin 90^\circ = 1$; AB i AD dvije stranice u trokutu, a M i N je $(s-b)$ i $(s-c)$. Taj poučak možemo u oznakama, koje su uobičajene danas u trigonometriji napisati ovako:

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

U trokutu ABC povučemo simetrale kutova i odredimo središte S upisanog kruga. Iz središta S spustimo okomice na stranice trokuta. Povučemo još AG i BH okomito na simetralu kuta C (sl. 1.).



Sl. 1.

Oko središta S imamo tri para jednakih kutova, a na opsegu trokuta tri para jednakih dužina.

Ako se iz svakog para dužina uzme po jedna dužina, dobije se polovina zbroja strana. Stoga je svaka od tih dužina, koja leži uz određeni kut trokuta, jednaka polovini zbroja strana, umanjena za stranicu, koja je tome kutu nasuprot. Tako je

$$AD = s - a, \quad BD = s - b, \quad CE = s - c, \tag{1}$$

a svaki od kutova, što su nasuprot jednoj takvoj dužini, suplementaran je sa sumom onih dvaju kutova, koji su nasuprot drugim dvjema dužinama, tj.

$$\sphericalangle BSD = 180^\circ - \sphericalangle ASC = \sphericalangle ASG \tag{2}$$

$$\sphericalangle ASD = 180^\circ - \sphericalangle CSB = \sphericalangle BSG. \tag{3}$$

Uzmemo li sinuse ova dva kuta, dobit ćemo

$$\frac{BD}{BS} = \frac{AG}{AS}; \quad \frac{AD}{AS} = \frac{BH}{BS}$$

ili

$$\frac{BD}{BS} \cdot \frac{AS}{AG} = 1, \quad \frac{AD}{AS} \cdot \frac{BS}{BH} = 1,$$

a odavde, pomnoživši lijeve i desne strane ovih jednakosti,

$$\frac{BD}{AG} \cdot \frac{AD}{BH} = 1$$

ili

$$AG \cdot BH = AD \cdot BD.$$

Prema (1) možemo to pisati

$$AG \cdot BH = (s-a)(s-b).$$

Dalje je (iz sl. 1.)

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{AG}{AC} \quad \text{i} \quad \sin\frac{C}{2} = \frac{BH}{BC}.$$

Dakle, opet množeći lijeve i desne strane

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{AG}{AC} \cdot \frac{BH}{BC} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}. \tag{4}$$

No, kako je

$$a = (s-c)+(s-b), \quad b = (s-c)+(s-a),$$

dobit ćemo

$$ab = s(s-c) + (s-a)(s-b),$$

pa stoga (4) možemo pisati ovako:

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)+(s-a)(s-b)}, \tag{5}$$

ali je isto tako

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{SE^2}{SC^2} = \frac{SE^2}{CE^2+SE^2}. \tag{6}$$

Uzmemo li sada recipročne vrijednosti desnih strana jednakosti (5) i (6) i to izjednačimo, dobit ćemo

$$\frac{CE^2}{SE^2} = \frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}.$$

No

$$CE = s - c, \quad SE = r$$

pa imamo

$$(s-c)^2 : r^2 = s(s-c) : (s-a)(s-b)$$

ili

$$(s-c) : r^2 = s : (s-a)(s-b).$$

Odavde imamo

$$r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c)$$

ili množeći sa s i vadeći korijen

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

odakle dobijemo polumjer r upisanog kruga.

Budući da iz slike vidimo, da je površina trokuta

$$\begin{aligned} P &= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c) \\ &= \frac{r}{2} \cdot 2s = r \cdot s \end{aligned} \tag{8}$$

to iz (7) i (8) izlazi da je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dakle, dobili smo Heronovu formulu za površinu trokuta.

Napomena. Članak je preuzet iz "*Matematički rad Boškovićev*". Rad. J., A. knj. 181, str. 119–126.