Rješavanje geometrijskih zadataka s pomoću mreža

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH
Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

Kada smo se pvi put susreli s geometrijom u osnovnoj školi, naši su učitelji tražili da imamo bilježnice bez crta, ali kada smo došli do računanja duljina stranica, površina ili opsega likova, bila je mnogo korisnija bilježnica "na kvadratiće" jer smo tada lakše mogli "pročitati" kolika je primjerice duljina neke stranice i sl. Listovi takve bilježnice bili su zapravo svojevrsna mreža.

Promatrajmo pravokutni Kartezijev koordinatni sustav. Nacrtajmo nekoliko polupravaca tako da u prvom kvadrantu iz točaka $1, 2, 3\ldots$ na osi x povučemo polupravce paralelne s osi y, a iz točaka $1, 2, 3\ldots$ na osi y povučemo polupravce paralelne s osi x. Ti polupravci sada tvore kvadratnu mrežu jediničnih kvadrata. Znači, **kvadratnu mrežu** čini skup točaka kojima su obje koordinate cijeli brojevi (u ovom slučaju nenegativni brojevi). Te točke nazivamo **čvorovima mreže**.

Osim kvadratne možemo konstruirati i mrežu trokuta koju čine jednakostranični trokuti.

Smještanje likova u ovakve mreže može uveliko olakšati i ubrzati rješavanje zadataka, a svakako razvija vizualnu percepciju kod učenika.

Određivanje površine lika smještanjem u kvadratnu mrežu prvi je uočio Georg Alexander Pick[1] 1899. godine.

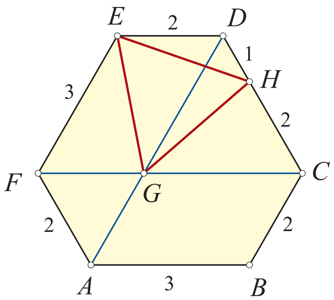
Pickova formula za površinu mnogokuta s vrhovima u cjelobrojnoj mreži glasi:

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$

gdje je I broj cjelobrojnih točaka u unutrašnjosti mnogokuta, a B broj cjelobrojnih točaka na njegovu rubu.

U ovom članku pokazat ćemo kako se geometrijski zadatci u vezi trokuta, četverokuta, mnogokuta i kruga mogu veoma uspješno rješavati s pomoću mreže trokuta ili kvadratne mreže.

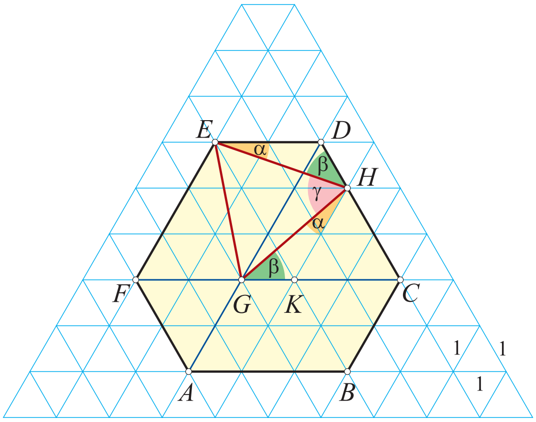
Zadatak 1. U šesterokutu $ABCDEF$ svi unutarnji kutovi su jednakih veličina. Za stranice vrijedi $|AB| = |CD| = |EF| = 3$ i $|BC| = |DE| = |FA| = 2$. Dijagonale $\overline{AD}$ i $\overline{CF}$ sijeku se u točki G, a točka H leži na stranici $\overline{CD}$ tako da je $|DH| = 1$. Dokažimo da je trokut EGH jednakostraničan (slika 1).



Slika 1.

prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, `asefket@pmf.unsa.ba`
Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

[1] Georg Alexander Pick (1859. – 1943.) austrijski je matematičar. Osim po Pickovu poučku ostao je zapamćen i po tome što je Alberta Einsteina upoznao s matematičarima koji su mu pomogli u radu na općoj teoriji relativnosti. Smatra se da Pickov poučak predstavlja vezu između tradicionalne euklidske geometrije i moderne digitalne (diskretne) geometrije.



Slika 2.

Rješenje: Zbroj veličina svih kutova šesterokuta jednak je $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$, pa je u ovom šesterokutu veličina svakog kuta jednaka 120°. Osim toga, duljine stranica šesterokuta su cijeli brojevi, pa je prirodno smjestiti ovaj šesterokut u trokutastu mrežu u kojoj su duljine stranica trokuta jednake 1, što je i učinjeno na slici 2.

Trokuti GKH i HDE su sukladni jer vrijedi: $|GK| = |HD|$, $|KH| = |DE|$ i $\sphericalangle GKH = \sphericalangle HDE$. Slijedi da je $|GH| = |HE|$, $\sphericalangle GHK = \sphericalangle DEH = \alpha$, $\sphericalangle HGK = \sphericalangle DHE = \beta$.

Neka je $\sphericalangle GHE = \gamma$. Iz trokuta GKH dobivamo: $\alpha + \beta + 120^\circ = 180^\circ$, tj. $\alpha + \beta = 60^\circ$. Vrijedi:

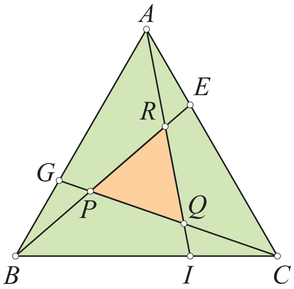
$$\alpha + \beta + \gamma = 120^\circ = KHD$$

i odavde

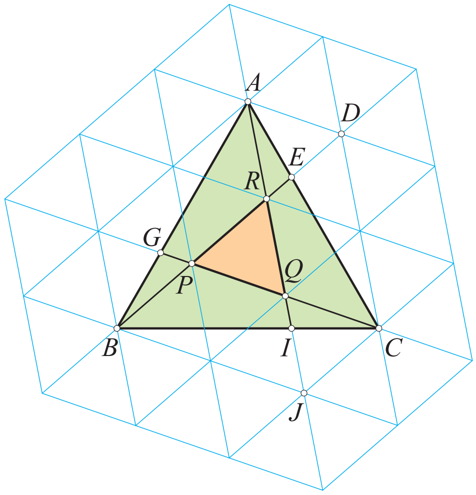
$$\gamma = 120^\circ - (\alpha + \beta) = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

pa zbog $|GH| = |HE|$ i $\gamma = 60^\circ$ slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 2. U jednakostraničnom trokutu ABC je $|IC| = |EA| = |GB| = \dfrac{1}{3}|BC|$. Dužine $\overline{AI}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CG}$ sijeku se u točkama P, Q, R (slika 3). Dokažimo da je $P_{PQR} = \dfrac{1}{7}P_{ABC}$.



Slika 3.



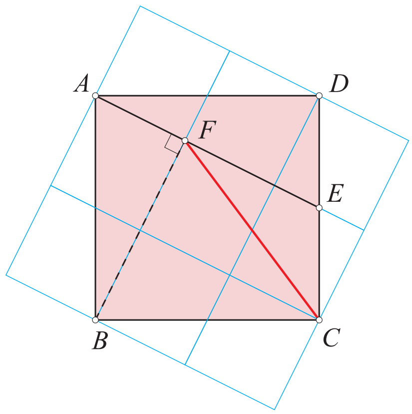
Slika 4.

Rješenje: Smjestimo trokut ABC u mrežu jednakostraničnih trokuta kao na slici 4. Neka je $P_{RDA} = 1$. Tada je $P_{BPCJ} = 4$, pa je $P_{BPC} = \dfrac{1}{2}P_{BPCJ} = \dfrac{1}{2}\cdot 4 = 2$. Na isti način je $P_{DAQC} = 4$ i $P_{\Delta QCA} = 2$ i $P_{BAR} = 2$. Sada imamo: $P_{ABC} = P_{\Delta BPC} + P_{QCA} + P_{BAR} + P_{PQR} = 2+2+2+1 = 7$, pa je

$$\frac{P_{PQR}}{P_{ABC}} = \frac{1}{7} \text{ tj. } P_{\Delta PQR} = \frac{1}{7}P_{ABC}.$$

Zadatak 3. U kvadratu $ABCD$ točka E je polovište stranice $\overline{CD}$. Ortogonalna projekcija točke B na dužinu $\overline{AE}$ je točka F. Dokažimo da je $|CF| = |CD|$.

Rješenje: Smjestimo kvadrat $ABCD$ u kvadratnu mrežu kao na slici 5. Sada je očigledno $|CF| = |CD|$.

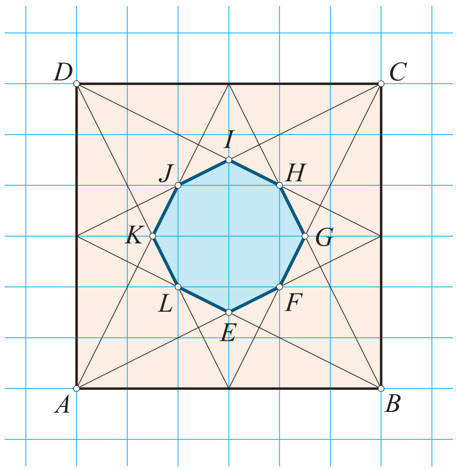


Slika 5.

Zadatak 4. U kvadratu su povučene dužine koje spajaju vrhove kvadrata s polovištima stranica kvadrata. Presječne točke tih dužina su vrhovi osmerokuta. Odredimo odnos površina tog osmerokuta i kvadrata.

Rješenje: Dani kvadrat smještamo u kvadratnu mrežu u kojoj je jedinična dužina jednaka šestini stranice promatranog kvadrata (slika 6). Vidimo da je $P_{LFHJ} = 2 \cdot 2 = 4$ i $P_{EFL} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ pa je $P_{EFGHIJKL} = P_{LFHJ} + 4P_{EFL} = 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$ i $P_{ABCD} = 6 \cdot 6 = 36$. Konačno je

$$\frac{P_{EFGHIJKL}}{P_{ABCD}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$



Slika 6.

Zadatak 5. Dokažimo da je površina kvadrata upisanog u polukružnicu $k(O, r)$ jednaka $\frac{2}{5}$ površine kvadrata upisanog u kružnicu $k(O, r)$.

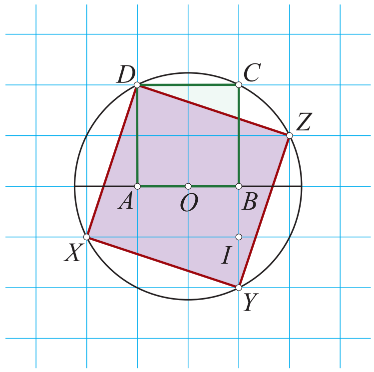
Rješenje: Neka je $ABCD$ kvadrat upisan u polukružnicu, a $XYZD$ kvadrat upisan u kružnicu istog središta i polumjera. Bez smanjenja općenitosti postavimo kvadratnu mrežu kao na slici 7. Tada je $P_{ABCD} = 2^2 = 4$.

Iz Pitagorina poučka primijenjenog na trokut IXY imamo

$$|XY|^2 = |IY|^2 + |XI|^2 = 3^2 + 1^2 = 10,$$

pa je zato $P_{XYZD} = |XY|^2 = 10$ i konačno dobivamo

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{XYZD}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$



Slika 7.

Čitateljima preporučujemo da sve zadatke riješe i na neki drugi način.

LITERATURA

1/ A. Marić (1996.): *Planimetrija – Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb.

2/ P. Mladinić (2011.): Površina likova u cjelobrojnoj mreži, *Matka*, god. 20, br. 77, str. 2–4, Zagreb.

3/ E. Specht (2001.): *Geometria-scientiae atlantis*, Otto-von Guericke Universität, Magdeburg.

4/ V. Stošić (2017.): *Planimetrija – Odabrani zadatci za osnovnu školu*, Element, Zagreb.