Zadatci više i niže kognitivne razine

Ljerka Jukić Matić, Osijek, Jasmina Alilović, Darda

Svaki nastavnik započinje novo polugodište ili školsku godinu očekujući kako će otprilike trećina njegovih učenika usvojiti ono što namjerava poučavati. Druga trećina učenika neće usvojiti gradivo ili će ga jedva usvojiti. Konačno, posljednja trećina učenika usvojit će dobar dio onoga što nastavnik poučava, ali nedovoljno da bi se smatrali dobrim učenicima.

Benjamin S. Bloom



Zadatak je osnova nastave matematike. Kakvim zadatcima izlažemo učenike, takvo znanje im i razvijamo. Ne samo znanje, već i shvaćanje o samoj prirodi matematike. Doživljavaju li učenici matematiku kao skup nepovezanih definicija, pravila i postupaka, pokazuje da su često bili izloženi zadatcima u kojima se ne povezuju znanja različitih matematičkih domena. Ili da ne postoji veza između konceptualnog značenja nekog postupka i samog postupka.

Pogledajmo sljedeća dva zadatka.

Zadatak 1. Sanja stavlja pločice na pod u kupaonici. Pod je duljine 2 m i širine 1.5 m. Koliko kvadratnih metara pločica Sanja mora kupiti? Zadatak 2. Razred učiteljice Marine planira uzgajati kokoši za proljetni sajam. Za kokoši žele ograditi prostor oblika pravokutnika, a na raspolaganju imaju 24 m ograde.

- a) Kolike bi trebale biti dimenzije ograđenog prostora da bi kokoši imale što više prostora na raspolaganju?
- b) Kolike bi bile dimenzije tog prostora (širina i duljina) ako učenici na raspolaganju imaju samo 16 m ograde?
- c) Kako biste odredili najveći mogući ograđeni prostor za bilo koju duljinu ograde koju imate na raspolaganju? Objasnite.

doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, ljukic@mathos.hr Jasmina Alilović, prof. matematike i fizike, OŠ "Matija Gubec", Čeminac, jasmina.alilovic@skole.hr

Oba zadatka su o površini pravokutnika i zahtijevaju poznavanje formule za izračunavanje površine pravokutnika, no među zadatcima postoje značajne razlike. Zadatci se razlikuju u načinu zaključivanja i razmišljanja, u broju načina na koji se mogu riješiti, u načinu na koji se rabi formula za površinu pravokutnika. Prvi zadatak traži učenike da upotrijebe formulu za izračunavanje površine pravokutnika u nekom kontekstu, no kognitivni angažman koji taj zadatak zahtijeva svrstava ga među zadatke niže kognitivne razine. S druge strane, zadatak s kokošinjcem nema očiti način rješavanja. Možemo ga riješiti na više načina ovisno o uzrastu učenika: npr. kreiranjem tablice u kojoj ispisujemo moguće duljine stranica, površinu i opseg dobivenog pravokutnika ili crtanjem pravokutnika različitih duljina stranica čiji je opseg 16 i računanjem njegove površine ili ucrtavanjem točaka (x, y) u pravokutni koordinatni sustav, gdje je x duljina jedne stranice pravokutnika, a y je vrijednost x(8-x) dobivena korištenjem formule za površinu pravokutnika i zadanog opsega. Osim toga, drugi zadatak postavlja i zahtjev za generalizacijom. S obzirom na kognitivni angažman koji zahtijeva zadatak 2, on pripada zadatcima više kognitivne razine.

Zadatci niže kognitivne razine (prema Stein i Smith, 1998):

- uključuju reprodukciju prethodno naučenih činjenica, pravila, formula i definicija
- algoritamski su, što znači da izričito traže korištenje algoritama ili postupaka ili je to vidljivo iz prethodnih uputa danih u zadatku
- usredotočuju se na davanje točnih odgovora umjesto na razvoj matematičkog razumijevanja
- ne zahtijevaju nikakva objašnjenja ili se objašnjenje fokusira samo na opis postupka koji je korišten.

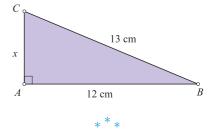
Pogledajmo nekoliko primjera koji ilustriraju zadatke niže kognitivne razine.

Primjer 1. U nekom razrednom odjelu omjer dječaka prema djevojčicama jest 2 : 3. Ako je u razredu 8 dječaka, koliko ima djevojčica?

Primjer 2. Povežite:

a(b+c) = ab + ac	svojstvo asocijativnosti zbrajanja
a + (b+c) = $(a+b) + c$	množenje nulom
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	množenje jedinicom
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju

Primjer 3. Izračunajte duljinu *x* stranice trokuta na slici.



S druge strane, zadatci visoke kognitivne razine

- usmjeravaju pažnju učenika na upotrebu postupaka ili algoritama u kojima se traži dublje razumijevanje matematičkih pojmova i ideja
- rabe višestruke načine prikaza matematičkog pojma npr. slikom, simbolima, problemskom situacijom, a razumijevanje nastaje stvaranjem veza među prikazima
- zahtijevaju određeni stupanj kognitivnog napora pri čemu se mogu rabiti postojeći algoritmi ili postupci, no bez razmišljanja; da bi učenici uspješno izvršili zadatak, trebaju koristiti ideje koje su temelj tog algoritma
- traže učenike da analiziraju zadatak i ispituju uvjete zadataka; uvjeti mogu ograničiti strategije i rješenja.

Pogledajmo nekoliko primjera koji ilustriraju zadatke više kognitivne razine.

 $\begin{array}{ll} \textbf{Primjer 1.} & \text{Koriste\'ei se kvadratnom mre\'zom} \\ 10\times10, \text{ ozna\'eite dio koji prikazuje postotak jednak razlomku} \\ \frac{3}{5}. & \text{Kako to zapisujemo kao decimalni broj?} \\ \end{array}$



Primjer 2. Ljestve od 25 m postavljene su uz zgradu. Dno ljestava udaljeno je 7 metara od zgrade. Ako vrh ljestava sklizne dolje za 4 metra, za koliko će se metara pomaknuti dno ljestava?

Primjer 3. Kvadratnu jednadžbu $x^2 - 7x + 12 = 0$ riješite faktorizacijom. Objasnite kako su faktori jednadžbe povezani s rješenjima jednadžbe i kako biste te podatke mogli koristiti za crtanje parabole. Zatim nacrtajte skicu.

Kako modificirati zadatke i povećavati kognitivne zahtjeve zadataka

Kada biramo zadatke za nastavu, promišljamo jesu li zadatci "preteški" za naše učenike. No riječ preteški nema jasno značenje. Nekome zadatak može biti izrazito težak jer uključuje nekoliko dugačkih i mukotrpnih izračuna. Zapravo, zadatke treba gledati jesu li dovoljno izazovni ili ne. Zadatke možemo modificirati tako da im povećamo kognitivnu razinu (prema Smith, Steele, Raith, 2017):

- Zamolite učenike da stvore zadatke u "kontekstu" za neki broj.
- U zadatak uključite zahtjev da učenici prikažu informacije na drugi način (slikom, tablicom, grafom, jednadžbom, u kontekstu).
- Koristite zadatak "izvan redoslijeda" prije nego što su učenici naučili napamet neko pravilo ili uvježbali postupak koji se može rutinski primijeniti.
- Dodajte upit u kojem se od učenika traži bilježenje uzorka ili postavljanje i testiranje hipoteze.
- U zadatak uključite upit koji od učenika zahtijeva generalizaciju.
- U zadatak uključite upit koji od učenika zahtijeva uspoređivanje različitih načina rješavanja ili matematičkih odnosa.

Ako pogledamo gornje opisnice, neke od njih pokazuju kako zadatak ne mora biti nerješiv problem da bi pripadao zadatcima s većim kognitivnim angažmanom.

Zadatci koji promiču razumijevanje i zaključivanje

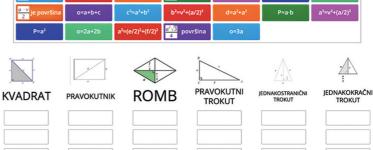
U matematici kao školskom predmetu treba promicati i poticati razumijevanje matematičkih pojmova i zaključivanje jer oni čine osnovu dobrog konceptualnog znanja. Swan (2005) je identificirao tipove zadataka koji potiču zaključivanje i razumijevanje matematičkih pojmova. Smatrao je kako učenici, surađujući s drugim učenicima, ostvaruju veći kognitivni angažman koji produbljuje njihovo razumijevanje i razvija matematičko mišljenje. Uz opis tipa zadaka, prikazat ćemo i primjere kojima se u svojoj nastavi koristi drugi autor ovog rada.

Klasifikacija matematičkih objekata

Učenici primjenjuju zadane klasifikacije za matematičke pojmove ili smišljaju vlastite. Tako uče razlikovati i prepoznavati svojstva pojmova. Također razvijaju matematički jezik i definicije. U klasifikacijama se preporuča koristiti pojmovima koji ne pripadaju danim kategorijama ili pripadaju dvjema kategorijama (ili više). Na taj se način razvija kritičko mišljenje.

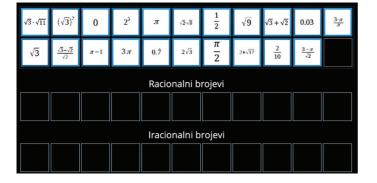
Primjer 1.

- a) Rasporedi izraze vezane za odgovarajući geometrijski lik.
- a) Smisli svoju klasifikaciju za dane izraze i pokaži je svom paru koji će pokušati objasniti kako je nastala tvoja klasifikacija.



Primjer 2.

- a) Razvrstaj brojeve u dvije skupine prema tome jesu li racionalni ili iracionalni.
- b) U koju bi skupinu stavio broj 1.52...? Objasni zašto.



Za broj 1.52... nemamo dovoljno informacija kako bismo odlučili je li on racionalan ili iracionalan pa učenici i to trebaju uočiti i raspraviti.

Procjena matematičkih tvrdnji

Učenici koji aktivno uče neprestano propituju pretpostavke i kritički promišljaju o tuđim odgovorima. Učenici odlučuju jesu li dane izjave istinite ili jesu li istinite "uvijek", "ponekad" ili "nikad". Time ih potičemo na razvijanje preciznih matematičkih objašnjenja, na davanje preciznih matematičkih argumenata, smišljanje primjera i protuprimjera kako bi obrazložili svoje mišljenje.

Primjer 1. Lana i dvije prijateljice kupile su majicu prijateljici lvi za rođendan po cijeni od 124 kune. Odlučile su ukupni trošak ravnopravno podijeliti među sobom. Je li to moguće? Obrazloži svom paru.

Primjer 2. Ivan se smatra dobrim matematičarem. On tvrdi da ne postoji ni jedan racionalan broj za koji vrijedi: $\frac{5}{7} < x < \frac{6}{5}$. Je li Ivan upravu? Ako jest, obrazloži zašto. Ako nije, obrazloži zašto nije. Raspravi obrazloženje sa svojim parom.

Kreiranje problema

Učenici smišljaju probleme koje drugi učenici rješavaju. To im daje priliku za kreativnost i stvaranje "vlastitih" problema. Dok drugi učenik pokušava riješiti zadatak, prvi učenik preuzima ulogu učitelja i objašnjava.

Primjer 1. Zapiši matematičku tvrdnju (točnu ili netočnu) vezanu za Pitagorin poučak i provjeri znanje svog para.

Npr. katete jednog od četiri sukladna pravokutna trokuta romba su polovine dijagonala, a hipotenuza je stranica romba. Jesam li u pravu?

Primjer 2. Napiši zadatak u vezi Pitagorina poučka koristeći šibice, špagu i ravnalo. Daj svom paru zadatak da ga riješi.



Druga mogućnost sastavljanja problema je sljedeća: postavljač postavlja problem jednim postupkom, a tada rješavač obrće taj postupak kako bi pronašao rješenje. U nekim slučajevima rješenje možda nije očekivano, te se može pretvoriti u raspravu. Učenici rade u paru.

Primjer 3.

onaj koji postavlja problem	onaj koji rješava
(postavljač)	(rješavač)
stvara jednadžbu korak po korak, npr. $x=5$ primjenjujući ekvivalentne transformacije (bez prebacivanj	rješava jednadžbu koju je učenik stvorio, $\operatorname{npr.} \frac{2x+8}{5} = 3.6$
crta pravokutnik zadanih	crta pravokutnik dane
dimenzija, računa njegovu	površine ili danog
površinu i opseg	opsega
zapisuje jednadžbu pravca	iz danog grafa
u obliku $y=kx+l$ i crta	dobiva jednadžbu
točke	pravca

198 broj 110 / godina 22. / lipanj 2021.

Analiza obrazloženja i rješenja

Učenici uspoređuju različite metode rješavanja problema, organiziraju rješenja i/ili dijagnosticiraju uzroke pogrešaka u rješenjima. Korisno je dati riješen zadatak i tražiti učenike da isprave pogrešku pojašnjavajući što je krivo zaključila osoba koja je rješavala zadatak.

Primjer 1. Na satu matematike učenici su dobili zadatak:

$$(2x + 3x)^2$$
.

Markovo rješenje glasi

$$(5x)^2 = 25x^2$$
.

Anino rješenje glasi

$$(2x + 3x)^2 = 12x^2 + 4x^2 + 9x^2 = 25x^2.$$

Petrovo rješenje glasi

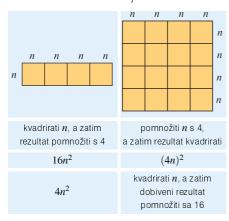
$$4x^2 + 9x^2 = 13x^2.$$

- a) Tko je točno riješio zadatak? Objasni zašto.
- b) Koji je način rješavanja učinkovitiji? Objasni svom paru zašto.

Tumačenje različitih matematičkih prikaza

U takvim zadatcima učenici trebaju povezati prikaze istog matematičkog pojma (slikovno, simbolički i tekstualno).

Primjer 1. Učenicima u paru ili skupinama podijelite kartice na kojima su slike, simbolički zapisi i tekstualni opisi. Zadatak je povezati ili grupirati kartice ekvivalentnih značenja.





M. Koritnik i Lj. Koritnik [1] su u 102. broju časopisa *Matematika i škola* opisali zadatke s više rješenja i zadatke s više načina rješavanja koji također promiču razumijevanje matematičkih pojmova i zaključivanje. Također su opisali i neke tipove zadataka koje smo i mi ovdje naveli. Takve zadatke nazvali su zadatcima otvorenog tipa. Kako god nazvali takve zadatke, važna je njihova unutrašnja karakteristika, a to je da povećavaju kognitivni angažman učenika.

U nastavi matematike treba rabiti i zadatke niže kognitivne razine, no treba pripaziti da takvi zadatci ne dominiraju. Zadatke koji su kognitivno zahtjevniji, bolje je rješavati na satu kada učenik na raspolaganju ima pomoć učitelja, a zadatke kojima se uvježbava određeni postupak ili algoritam ostaviti za zadaću.

LITERATURA

- 1/ M. Koritnik i Lj. Koritnik (2019.): Zadatci otvorenog tipa, *Matematika i škola*, 102, str. 56–60.
- 2/ M. Smith, M. D. Steele, M. L. Raith (2017.): Taking action: Implementing effective mathematics teaching practices in grades 6 – 8, Reston, VA: NCTM.
- 3/ M. Smith, M. K. Stein (1998.): Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice, Mathematics Teaching in the Middle School, 3, str. 344– 350.
- 4/ P. Sullivan, P. Liburn (2017.): Open-ended maths activities: Using good questions to enhance learning, Oxford Press.
- 5/ M. Swan (2005.): Improving learning in mathematics: Challenges and strategies, Sheffield: Teaching and Learning Division, Department for Education and Skills Standards Unit.
- 6/ M. Swan (2008.): A designer speaks, Educational Designer, 1(1), https://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue1/article3/