

Tko je prvi... pravilno konstruirao tangentu na neku krivulju?



Franka Miriam Brueckler,
Zagreb

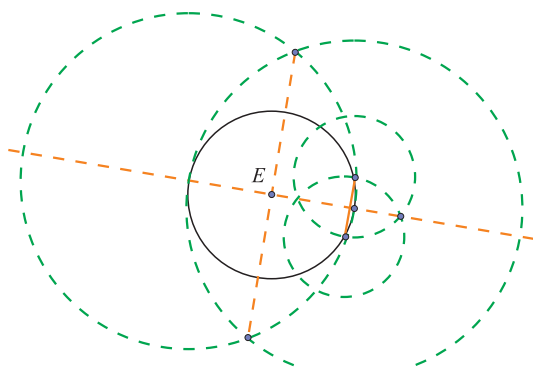
U modernoj matematici pojam tangente nije odvojitiv od pojma derivacije. Štoviše, deriviranje je proizašlo iz problema određivanja jednadžbe tangente na krivulju poznate jednadžbe nakon što je René Descartes 1630-ih godina uveo koordinatni sustav. No, ideja tangente i njezine konstrukcije je – naravno – bitno starija: tangenta jest pravac koji se oko promatrane točke najbolje priljubljuje uz krivulju i ne ovisi o tome interpretiraju li se krivulja i tangenta u koordinatnom sustavu ili ne. Prije otkrića analitičke geometrije (i deriviranja) matematičari su se morali služiti “čistom” geometrijom ako su htjeli konstruirati tangentu na neku krivulju i naravno da je taj problem općenito bio težak.

Vjerujem da pogađate kako je prva konstrukcija tangente bila konstrukcija tangente na kružnicu. Bilo je to u antičkoj Grčkoj. Vjerojatno je prvi koji je znao konstruirati tangente na kružnicu u njezinoj točki i povučene iz točke izvan kružnice bio **Hipokrat s Hiosa** (5. st. pr. Kr., spominjali smo ga već u broju 76 ovog časopisa), no najstariji sačuvani

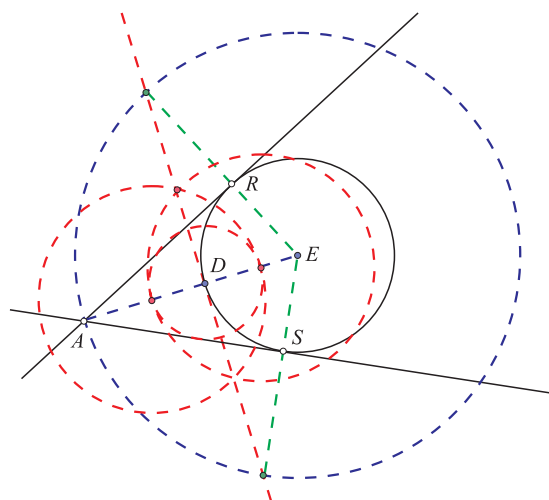
zapisi tih konstrukcija nalaze se u III. knjizi **Euklidovih Elemenata**, čiji se sadržaj pripisuje upravo Hipokratu s Hiosa. Tu nalazimo dvije propozicije koje nam omogućuju navedene konstrukcije:

- 17. propozicija: Iz točke izvan kruga povući tangentu na kružnicu.

Dokaz ove propozicije sadrži konstrukciju obiju tangenti na kružnicu iz točke A izvan kružnice: Prvo se konstruira središte E zadane kružnice koristeći 1. propoziciju III. knjige *Elemenata* (slika 1). Zatim se spoje A i E te nacrtaju kružnica istog središta E koja prolazi kroz A (ljubičasto na slici 2). Slijedi konstrukcija okomice na AE kroz D (sjecište AE s kružnicom), koristeći 11. propoziciju I. knjige *Elemenata* (crveno na slici 2). Sjecišta te okomice s kružnicom koja prolazi kroz A spoje se sa središtem E (zeleno na slici 2) – sjecišta R i S tih spojnica s polaznom kružnicom su dirališta tangenti povučenih iz A na zadanu kružnicu.



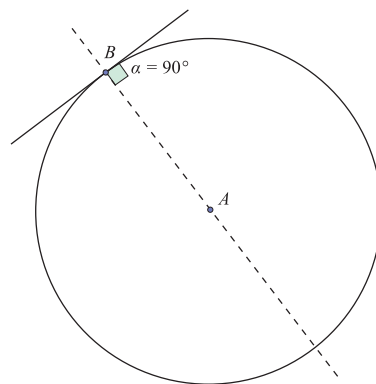
Slika 1. Konstrukcija središta E zadane kružnice: Nacrta se simetrala proizvoljne tetive i presiječe simetralom dužine koja spaja sjecišta prve simetrale s kružnicom



Slika 2. Konstrukcija tangente na zadanu kružnicu iz dane točke A izvan kružnice

- 18. *propozicija*: Ako je pravac tangenta na kružnicu te ako se povuče pravac koji spaja središte s diralištem, taj je pravac okomit na tangentu.

Euklid dokazuje tu propoziciju, a budući da se okomica na pravac kroz danu točku može konstruirati ravnom i šestarom, što je za starogrčke matematičare bio uvjet za prihvaćanje rješenja problema, ova propozicija omogućuje konstrukciju tangente na kružnicu u bilo kojoj njezinoj točki B (slika 3): Nađemo središte kružnice A



Slika 3. Konstrukcija tangente na kružnicu u jednoj točki B

postupkom kao na slici 1, a zatim se kao u crvenom dijelu konstrukcije na slici 2 konstruira okomica na AB kroz B i to je tražena tangenta.

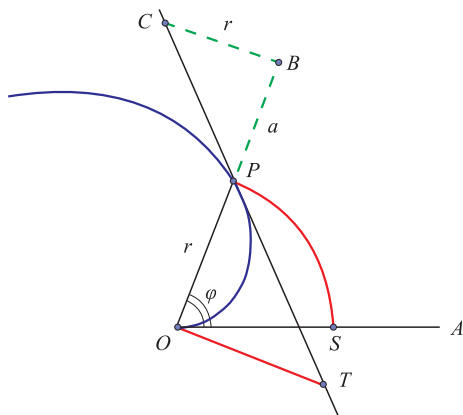
Možda vas ipak zanima tko je prvi konstruirao tangente na neku kompliciraniju krivulju nego je to kružnica? I na ovo pitanje odgovor ostaje u antičkoj Grčkoj, u doba helenizma, ali nije jednoznačan. Bio je to ili **Apolonije iz Perge** ili **Arhimed iz Sirakuze**. Oba ta velika matematičara živjela su u 3. st. pr. Kr. Apolonije je napisao djelo *Konike* u kojem po prvi puta temeljito analizira sva tri tipa presjeka stošca (pisali smo o tome u broju 91) te među ostalim daje i konstrukcije tangenti na konike (s obzirom na kompliciranost Apolonijeva izlaganja nećemo ovdje predstaviti te konstrukcije, zainteresirane upućujemo na knjigu navedenu pod 1. u popisu literature), dok pak Arhimed u svojem djelu *O spiralama* među ostalim opisuje svoju, Arhimedovu spiralu i konstrukciju tangente na nju. Više o Arhimedovoj spirali (krivulja čiju jednadžbu danas u polarnim koordinatama zapisujemo kao $r = a\varphi$) napisat ćemo u nekom od sljedećih brojeva, a ovdje ćemo samo dati Arhimedovu konstrukciju tangente na nju u proizvoljnoj točki spirale (na njezinom prvom okretu, tj. za $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Arhimed je zapravo dokazao sljedeću propoziciju, temeljem koje se može konstruirati tangenta na spiralu:

Neka je Arhimedova spirala nastala gibanjem točke O po rotirajućem polupravcu čiji početni položaj je OA^1 . Ako je P proizvoljna točka na toj spirali, onda je duljina pripadne suptangente² OT jednaka

¹ Danas bismo rekli: OA je polarna os za polarni koordinatni sustav u kojem je jednadžba Arhimedove spirale $r = a\varphi$.

² Suptangenta je dužina čiji jedan kraj je O , a drugi kraj T je sjecište tangente s okomicom na OP .

duljini luka $\widehat{PS}$ kružnice sa središtem O , gdje je S sjecište kružnice s OA (duljine crvenih linija na slici 4 su jednake).



Slika 4. Konstrukcija tangente na
Arhimedovu spiralu u njezinoj točki P

Modernim jezikom rečeno to znači da je za svaku točku P na Arhimedovoj spirali, ako s r označimo njezinu udaljenost do ishodišta i s φ kut $\angle POA$,

duljina suptangente $|OT|$ jednaka $r\varphi$, pa je za svaku točku P omjer $|OT| : r = \varphi$. Budući da je kod Arhimedove spirale r proporcionalno s φ , s nekom pozitivnom konstantom proporcionalnosti a , tj. za svaku točku P je $|OT| : r = r : a$, to znači da ako produljimo spojnicu O i T za iznos a do točke B pa u B povučemo okomicu na tu spojnicu i na nju nanesimo $r = |OT|$ (zeleno na slici 4), dobit ćemo točku C tangente, tj. pravac PC je tražena tangenta (za svaku točku P na spirali su trokuti POT i PBC slični).

LITERATURA

- 1/ Heath, T. (1921.): *A History of Greek Mathematics*, Vol. II. Oxford at the Clarendon Press
- 2/ D. E. Joyce (1998.): *Elements*, <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>. (1998) pristupljeno 18. 1. 2020.



 +  +  = 66
 +  +  = 44
 +  +  = 13

 +  +  = ?

