

Prebrojavanja

MLADI NADARENI MATEMATIČARI



Marin Getaldić

Andrija Tomorad, Zagreb

Uvod

Na natjecanjima za osnovnu i srednju školu često se pojavljuju zadatci tipa:

Zadatak 1. Koliko ima četveroznamenastih brojeva djeljivih s 5 kojima je znamenka stotica veća od 4, a znamenka desetica prost broj?

ili tipa:

Zadatak 2. Na koliko načina iz grupe od desetoro djece možemo odabrati četvero tako da među njima ne budu i najviše i najniže dijete?

Tema ovog članka bit će različite metode koje se koriste kod takvih (i sličnih) prebrojavanja. Iako je važnije intuitivno razumjeti ove zadatke i njihova rješenja, nego znati ih precizno zapisati matematičkom terminologijom i simbolima, koristit ćemo se pojmovima poput *skup*, *podskup*, *unija skupova*, *presjek skupova* i *Kartezijev umnožak*. Razlog za to je sljedeći: bit će zadataka koji su međusobno slični, a u tom slučaju dobro je imati neku osnovu koja će biti primjenjiva za sve.

U većini će zadataka cilj (ili korak prema rješenju) biti prebrojiti k -člane podskupove nekog skupa. Pritom se pitamo je li važan redoslijed elemenata u tom podskupu te može li se neki element pojaviti više od jednom. Primjerice, u prvom zadatku brojimo određene četveročlane nizove znamenaka iz skupa $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ takve da se znamenke mogu ponavljati i važan je njihov redoslijed (četveroznamenasti brojevi). U drugom zadatku opet brojimo određene četveročlane nizove znamenaka iz skupa $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, ali se znamenke ne smiju ponavljati, niti je redoslijed važan (djecu smo označili brojevima od 0 do 9, 0 je najniže, a 9 najviše dijete; to ćemo često raditi u rješenjima).

Sada ćemo objasniti neke od osnovnih principa prebrojavanja i pokazati na primjerima kako ih ko-

ristiti. Višestruko prebrojavanje te metoda štapića i kuglica nešto su teže teme i namijenjene su srednjoškolcima, dok je ostatak članka namijenjen i starijim osnovnoškolcima i srednjoškolcima.

Uparivanje (princip bijekcije)

Neka su A i B dva skupa. Princip bijekcije kaže da ako možemo na neki način podijeliti elemente iz A i B u uređene parove kojima je prvi element iz A , a drugi iz B , onda ti skupovi imaju jednako mnogo elemenata pod uvjetom da je svaki element uparen s točno jednim elementom (ne postoji element koji nema para ili ima više od jednog para). Takvo uparivanje "jedan na jedan" nazivamo bijekcijom između skupova A i B .

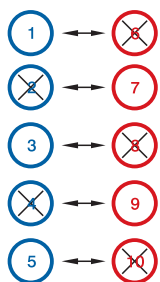
Primjer 1. Na mojoj tipkovnici, prvi red slova QWERTZUIOPŠĐ i drugi red slova ASDFGHJKLČČŽ imaju isti broj slova. To znam jer odmah vidim da se Q nalazi iznad A, W iznad S, ... i Đ iznad H te ih na taj način podijelim u parove. Uočite da ne moram niti brojiti koliko ima slova u svakom redu.

Primjer 2. Neka je S skup prvih 100 prirodnih brojeva. On ima točno 100 različitih podskupova koji imaju 99 elemenata. To znamo jer za svaki taj podskup postoji točno jedan broj iz skupa S koji nije u tom podskupu. Zato svaki 99-člani podskup možemo upariti s jednim elementom koji nije u njemu, dakle 99-članih podskupova ima onoliko koliko ima elemenata u S .

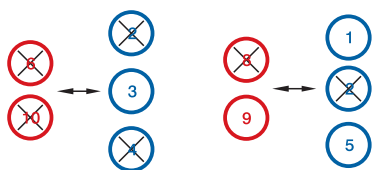
Primjer 3. Imamo pet crvenih i pet plavih novčića. Među njima tri crvena i dva plava imaju na jednoj strani znak X. Na početku su svi novčići okrenuti na stranu na kojoj nije X i postavljeni tako da ne znamo koji novčići imaju X na poledini. Možemo okrenuti ili bilo koja tri plava novčića ili bilo koja dva crvena novčića. Dokaži da je u oba slučaja jednaka vjerojatnost da budu okrenuta dva novčića sa znakom X.

Rješenje. Neka su plavi novčići označeni brojevima od 1 do 5, a crveni brojevima od 6 do 10 te neka su parni brojevi označeni znakom X. Želimo povezati moguća okretanja (tj. parove) crvenih novčića s mogućim okretanjima (tj. trojke) plavih novčića. To je najlakše napraviti tako da uparimo svaki crveni novčić s jednim plavim. Uparit ćemo svaki crveni novčić k s novčićem $k - 5$. Uočimo da je na taj način svaki parni novčić uparen s neparnim i obrnuto: ukoliko je k paran broj, $k - 5$ je neparan te ako je k neparan broj, $k - 5$ je paran (slika 1).

Nakon toga okrenimo bilo koja dva crvena novčića i one plave novčiće koji nisu upareni s ta dva novčića. Uočimo da ako su oba crvena parna, onda će i među tri okrenuta plava novčića biti dva parna. Vrijedi i obrnuto: ako nisu oba okrenuta crvena bili parni, onda neće biti ni dvaju parnih među trima okrenutim plavima. To zaključujemo jer znamo da je svaki parni novčić u paru s neparnim. Na taj smo način konstruirali bijekciju između načina okretanja crvenih i plavih novčića (slika 2).



Slika 1.



Slika 2.

Pritom je svaki par načina okretanja takav da ili oba okreću dva novčića s oznakom X, ili nijedan ne okreće dva novčića s oznakom X. To znači da okretanje dvaju crvenih novčića ima onoliko mogućnosti u kojima su okrenuta dva novčića s oznakom X, koliko i okretanje triju plavih novčića, dakle vjerojatnosti da okrenemo dva novčića s oznakom X su jednake.

Napomena. Važno je da naše uparivanje ne izostavlja nikoku kombinaciju, te nikojim različitim kombinacijama ne pridružuje istu. To slijedi izravno iz toga kako smo definirali uparivanje.

Princip umnoška

Princip umnoška. Neka su A i B skupovi takvi da $|A| = a$, $|B| = b$ (broj elemenata skupa). Definiramo Kartezijev umnožak $A \times B$ kao skup svih uređenih parova kojima je prvi član iz A , a drugi član iz B , tj. $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Tada vrijedi:

$$|A \times B| = ab.$$

Princip umnoška možemo vizualizirati tako da zamislimo ploču dimenzija $a \times b$ takvu da se u polju koje se nalazi u m -tom retku i n -tom stupcu nalazi par (m, n) . Takva ploča bi zaista imala mn polja (m po dužini, n po širini).

Na ovaj način možemo, primjerice, zaključiti da ima 10 dvoznamenastih brojeva djeljivih s pet kojima je znamenka desetica neparna. Ima $5 \cdot 2 = 10$ uređenih parova kojima je prvi element 1, 3, 5, 7 ili 9, a drugi 0 ili 5 (tj. Kartezijev umnožak $\{1, 3, 5, 7, 9\} \times \{0, 5\}$ ima $5 \cdot 2 = 10$ elemenata), a svaki takav par odgovara jednom traženom broju. To bi bio zaključak izveden izravno iz principa umnoška, ali to neće biti potrebno u zadacima. Češće ćemo shvaćati princip umnoška na sljedeći način: "Ako se prvi dio posla može obaviti na m načina, a drugi na n načina, onda se cijeli posao može obaviti na mn načina."

Sad dolazi najvažniji dio, a to je proširenje na posao s n dijelova. Ako se posao sastoji od r dijelova, i pritom se prvi dio može obaviti na n_1 načina, drugi na n_2 načina, ..., a zadnji r -ti na n_r načina, onda se cijeli posao može obaviti na (umnožak) $n_1 n_2 \cdots n_r$ načina. To ćemo pokazati na zadatku 1 iz uvoda:

Primjer 4. Koliko ima četveroznamenastih brojeva djeljivih s 5 kojima je znamenka stotica veća od 4, a znamenka desetica prost broj?

Rješenje. Znamenku tisućica možemo odabrati na 9 načina (bilo koja osim nule), znamenku stotica na 5 načina (5, 6, 7, 8 ili 9), znamenku desetica na 4 (2, 3, 5, ili 7), a znamenku jedinica na dva načina (0 ili 5). Dakle, ima $9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 360$ takvih brojeva.

U ovom slučaju nam je "dio posla" odgovarao odabiru jedne znamenke.

Princip zbroja

Princip zbroja. *Neka su A i B skupovi takvi da nemaju zajedničkih elemenata. Tada vrijedi*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Princip zbroja govori nam da je broj elemenata unije dvaju disjunktih skupova jednak zbroju brojeva elemenata tih skupova. U zadatcima ćemo često sami morati određivati disjunktne skupove preko kojih bi riješili zadatak i neće uvijek biti očito kako to napraviti, a sljedeći zadatak će nam to pobliže objasniti.

U primjeru 4 prešutjeli smo jednu vrlo važnu činjenicu, a to je da broj načina na koji možemo odabrati neku znamenku ne ovisi o tome kako biramo ostale znamenke. Suprotno tome, promotrimo sljedeći primjer:

Primjer 5. Koliko ima parnih troznamenkastih brojeva kojima je znamenka stotica manja od znamenke jedinica?

Rješenje. Znamenku desetica možemo odabrati na 10 načina, a znamenku jedinica na 5, ali za znamenku stotica broj načina ovisi o tome što smo izabrali za znamenku jedinica. Zato ćemo rastaviti problem na nekoliko jednostavnijih. Pitamo se koliko ima brojeva kojima je znamenka jedinica 8, odnosno 6, 4, 2 te 0. Znamenka jedinica mora biti parna, no jasno je da ne može biti 0 jer tada uvjet da znamenka stotica mora biti manja od znamenke jedinica ne možemo ispuniti. Stoga razmatramo četiri slučaja i odgovori su redom $7 \cdot 10$ (znamenka stotica mora biti manja od 8, znamenka desetica može biti bilo koja), $5 \cdot 10$, $3 \cdot 10$ i $1 \cdot 10$, dakle ukupno 160 različitih brojeva.

Razlikujemo to od sljedećeg primjera (koji **nije** vezan za princip sume):

Primjer 6. Na koliko načina može n ljudi stati u red?

Rješenje. Kao i dosad, prvo se pitamo koliko osoba može doći na prvo mjesto: n osoba. Zatim se pitamo koliko osoba može doći na drugo mjesto: sve osim one koja je već stala na prvo mjesto. Da, istina je da odabir osobe na prvom mjestu utječe na to "koje osobe mogu na drugo mjesto", ali za razliku od prošlog primjera ne utječe na to "koliko

osoba može doći na drugo mjesto" – to je $n - 1$ neovisno o izboru prve osobe. Tako na svako sljedeće mjesto može doći jedna osoba manje nego na prethodno sve do zadnjeg n -tog mjesta na koje može doći samo jedna osoba. Dakle, ukupno će biti $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ različitih redova (umnožak svih prirodnih brojeva od 1 do n označavamo s $n!$ i nazivamo " n faktorijel", dodatno definiramo $0! = 1$).

Višestruko prebrojavanje

Ovaj princip oslanja se na vrlo jednostavnu činjenicu: broj elemenata skupa ne ovisi o tome na koji način brojimo njegove elemente.

Primjer 7. Na koliko načina k od ukupno n osoba može stati u red?

Rješenje. Kad bismo to htjeli prebrojiti, radili bismo kao i u prethodnom primjeru, samo što za $k < n$ ne bismo završili s jednim kandidatom za zadnje mjesto u redu, nego s $n - k + 1$; ukupno $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ načina da odaberemo red od k osoba. Što ako samo želimo odabrati grupu od k osoba tako da redosljed nije bitan? U daljnjem tekstu, grupa označava skup ljudi takav da njihov redosljed nije bitan, dok red označava bitan poredak.

Rješenje. Neka je M broj koji tražimo. Uočimo da kad bismo brojili redove od k osoba, mogli bismo to učiniti tako da prvo izaberemo grupu od k osoba (to možemo na M načina), a onda tih k osoba posložimo u red (to možemo na $k!$ načina). Dakle, ima $M \cdot k!$ načina da izaberemo red od k osoba. Otprije znamo da različitih redova od k osoba ima $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ i to je drugi način brojenja redova od k osoba. Znamo da oba načina brojenja moraju dati jednak broj redova, pa ih izjednačimo. Iz toga slijedi

$$M = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ (čitamo: " n povrh k ") definiramo kao:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

pri čemu je $\binom{n}{k} = 0$ za $k > n$.

Napomena. Općenito, skup od n elemenata ima $\binom{n}{k}$ k -članih podskupova.

Drugi način na koji možemo doći do rješenja jest sljedeći: ako prebrojimo sve redove od k osoba odabranih između n osoba, tada smo svaku grupu od k osoba brojili točno $k!$ puta, dakle trebamo broj redova od k osoba odabranih između n osoba podijeliti s $k!$. Red od k osoba iz njih n možemo odabrati na $n(n-1) \dots (n-k+1)$ načina pa dijeljenjem s $k!$ dobivamo isti rezultat kao u prvom načinu.

Primjer 8. Na koliko načina može n bračnih parova stati u red tako da svaka žena stoji ispred (ali ne nužno neposredno ispred) svojeg muža?

Rješenje. Opet ćemo broj koji tražimo označiti s M . Zamislimo da imamo zapisanih svih M redoslijeda na papiru. Zatim ponavljamo prvih M redoslijeda, ali pritom zamijenimo mjesta prve žene i njezinog muža. U sljedećem koraku od $2M$ redoslijeda dolazimo do njih $4M$ tako da dodamo redoslijede u kojima zamijenimo mjesta muža i žene u drugom bračnom paru, i tako dalje.

U svakom koraku broj redoslijeda će se udvostručiti, pa ćemo na kraju dobiti $2^n \cdot M$ zapisanih redoslijeda. To će biti svi mogući poretci, a njih ima $(2n)!$. Zato je $M = \frac{(2n)!}{2^n}$.

Metoda štipića i kuglica

Primjer 9. Na koliko načina možemo dvadeset istih kuglica smjestiti u deset različitih kutija?

Rješenje. U ovom primjeru kuglice ne razlikujemo, bitan je samo njihov broj u pojedinoj kutiji. No kutije razlikujemo, tj. nije isto stavimo li sve kuglice u prvu ili u drugu kutiju. I konačno, nema uvjeta na broj kuglica u pojedinoj kutiji (kutija može biti prazna, nema gornje granice).



Slika 3.

Zamislimo niz od 20 kuglica i 9 štipića (slika 3). One kuglice koje su prije prvog štipića u nizu neka

idu u prvu kutiju, između prvog i drugog neka idu u drugu kutiju i tako dalje. Na taj smo način svakom rasporedu kuglica pridružili jedan niz od 20 znakova jedne vrste i 9 znakova druge vrste. Takvih nizova ima ukupno $\binom{29}{9} = 10\,015\,005$ (biramo 9 mjesta na koja postavimo štipiće, a kuglice se zatim postave na preostala mjesta), pa je i toliko mogućih rasporeda.

Napomena. Općenito, n jednakih kuglica možemo razmjestiti u m različitih kutija na $\binom{n+m-1}{m-1}$ načina. U zadatcima je bitno uočiti što nam predstavlja kuglice, a što kutije. Takav način rješavanja zadatka naziva se metodom štipića i kuglica.

Primjer 10. Na koliko načina se broj 40 može prikazati kao zbroj pet prirodnih brojeva (redoslijed pribrojnika je važan)?

Rješenje. Pojedini zbroj možemo kodirati nizom

|||||||·|||||||·|||||||·||||·||||

u kojem ima 40 znakova | i 4 znaka ·, pri čemu točka nije na početku i na kraju, i nigdje se ne pojavljuju dvije točke. To znači da je iza točke uvijek znak |. Zamijenimo li "·" sa x dobivamo

|||||||x|||||||x|||||||x||x|||

To je niz od 36 znakova | i 4 znaka x , s time da i dalje treba paziti da na početku ne bude x . Zatim pobrišemo prvi znak | i dobivamo

|||||||x|||||||x|||||||x||x|||

To je niz od 35 znakova | i 4 znaka x koji smiju biti u bilo kojem poretku, pa ih ima $\binom{39}{4}$. To je kao da smo u prethodnom primjeru tražili da nijedna kutija ne smije biti prazna, pa bismo na početku smjestili po jednu kuglicu od njih 40 u svaku od pet kutija, a nakon toga primijenili metodu štipića i kuglica na preostalih 35 kuglica.

Zadaci za vježbu

1. Na koliko načina Matej može složiti sendvič za užinu ako želi u pecivo staviti jednu vrstu

šunke i jednu vrstu sira, a raspolaže s 3 vrste šunke, 4 vrste sira i 2 vrste peciva? (*Uputa*: princip umnoška. *Rješenje*: 24.)

2. a) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva?
 b) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite?
 c) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3?
 d) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva koji sadrže točno jednu znamenku 5?
 e) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1?

(*Rješenje*: a) 9000; b) 4536; c) 5832; d) 2673; e) 3168.)

3. Koliko ima peteroznamenkastih parnih palindroma? Palindromi su riječi ili brojevi koji se jednako čitaju (pišu) i sprijeda i straga, npr. 12321. (*Rješenje*: 400.)

4. Na koliko načina možemo k nagrada podijeliti na n osoba ako su nagrade:
 a) različite i svaka osoba može dobiti najviše jednu nagradu
 b) različite i svaka osoba može ih dobiti neograničeno mnogo
 c) iste i svaka osoba može dobiti najviše jednu nagradu
 d) iste i svaka osoba može ih dobiti neograničeno mnogo?

(*Rješenje*: a) $n(n-1) \dots (n-k+1)$; b) n^k ;
 c) $\binom{n}{k}$; d) $\binom{n+k-1}{k}$.)

5. Dana je ploča dimenzija 7×10 . U jednom potezu možemo pomaknuti figuru za jedno polje desno ili jedno polje gore. Na koliko načina možemo doći iz donjeg lijevog u gornji desni kut? (*Rješenje*: $\binom{17}{7}$.)

6. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka neparna? (*Uputa*: što je negacija tvrdnje "barem jedna znamenka broja je neparna"? *Rješenje*: 87 500.)

7. Riješi zadatak 2 iz uvoda: Na koliko načina iz grupe od desetero djece možemo odabrati četvero tako da među njima ne budu i najviše i najniže dijete (svi su različite visine)? (*Uputa*: od svih mogućih odabira $\binom{10}{4}$ oduzimamo one u kojima su i najniže i najviše dijete – takve biramo na $\binom{10}{4}$ načina. *Rješenje*: $210 - 28 = 182$.)

8. U primjeru 6 izračunali smo da n ljudi može stati u red na $n!$ načina. Na koliko načina može n ljudi stati u krug? Dva rasporeda su različita ako u njima neka osoba ima različitog lijevog ili desnog susjeda, inače su rasporedi isti (jer se jedan iz drugog mogu dobiti rotacijom). (*Uputa*: koliko će redova biti "pridruženo" svakom krugu? *Rješenje*: $(n-1)!$.)

9. Koliko ima 20-članih nizova nula i jedinica koji imaju točno sedam jedinica, ali ne postoje dvije jedinice koje su jedna do druge? (*Uputa*: prvo riješite zadatak bez ograničenja da nikoje dvije jedinice nisu jedna do druge, a onda razmisli o primjeru 10.)

10. Dokaži da je $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ za prirodan n . (*Uputa*: što broji lijeva strana, a što desna? *Rješenje*: obje strane broje sve podskupove skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Lijeva broji ovisno o broju elemenata podskupa pa sve zbroji, a desna broji izravno. Ima ukupno 2^n podskupova jer ima 2^n binarnih nizova, svaku znamenku možemo odabrati na dva načina: 0 ili 1; princip umnoška. Bijekcija će biti sljedeća: jedinica na k -tom mjestu binarnog niza ako je k u odabranom podskupu, inače nula na k -tom mjestu.)

11. Na koliko načina možemo brojeve $1, 2, \dots, 16$ upisati u polja tablice 4×4 tako da zbroj brojeva u svakom retku i stupcu bude neparan? (*Uputa*: prvo odaberite na kojim će mjestima biti neparni brojevi. *Rješenje*: $144 \cdot (8!)^2$.)