

Tko je prvi... definirao proporcionalnost?



Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Jedan od elementarnih matematičkih pojmova s kojim mnogi učenici imaju problema jest proporcionalnost (razmjernost). Možda bi im mali pogled u povijest mogao pomoći da ju ne poistovjećuju s rastućim ovisnostima? Ne znam, ali svakako da je dobro i za matematiku i za opću kulturu znati odakle potječe taj pojam koji se u raznim kontekstima često susreće u svakodnevici i raznim strukama.

Naziv proporcionalnost dolazi iz latinskog jezika na kojem *proportionalitas* znači sklad. Kao i u većini drugih slučajeva u kojima matematički stručni izraz potječe iz latinskog jezika, tako vrijedi i ovdje: ovom su se temom bavili antički grčki matematičari.¹

Vjerojatno su već pitagorejci imali neke ideje o ovom pojmu, no najstarija zapisana definicija nalazi se u **Euklidovim "Elementima"** (oko 300. g. pr.

Kr.), na početku V. knjige u kojoj 3. do 6. definicija glase:

Omjer je odnos među iznosima dviju istovrsnih veličina.² Za dvije veličine kažemo da imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge. Za četiri veličine kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj, ako kojim god brojem³ pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redosljedu. *Veličine koje su u istom omjeru zovemo razmjernim (proporcionalnim).*

Znači li to da je Euklid Aleksandrijski autor prve definicije proporcionalnosti? Gotovo sigurno odgovor na ovo pitanje glasi "ne". Naime, poznato je da sadržaj V. knjige "Elementa" potječe od **Eudoksa**

doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler, Zavod za matematičku analizu, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, bruckler@math.hr

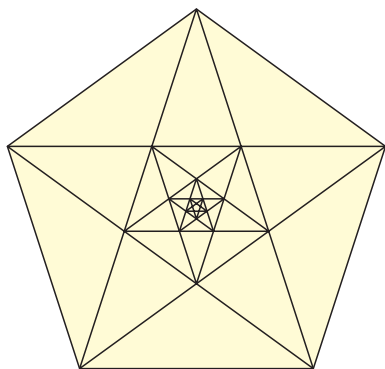
¹ Možda bi se nekom činilo logičnije pretpostaviti da pojmovi s latinskim korijenom naziva potječu iz antičkog Rima, no Rimljani nisu imali interesa za znanost i njihovi prijevodi grčkih znanstvenih djela su većinom bili kvalitete "Google translate". Naravno, mnoge riječi s latinskim korijenom potječu iz kasnijih razdoblja jer je u srednjem vijeku, pa i dugo nakon njega, latinski jezik bio jezik znanosti.

² Dakle, u omjer možemo staviti dva broja, dvije duljine, dvije površine, dva volumena...

³ U starih Grka pod brojem se misli isključivo na prirodan broj.

iz Knida (oko 408. – 355. g. pr. Kr.) te je Euklidova zasluga ovdje vjerojatno, kao i u ostatku “Elementa”, samo u preciziranju i logičkom sređivanju rezultata svog prethodnika. Dakle, odgovor na pitanje iz naslova jest prema trenutnim saznanjima: Eudoks. No, što li je Eudoksa potaklo na bavljenje omjerima i proporcionalnošću?

Kao što je dobro poznato, pitagorejci su u 6. st. pr. Kr. bili prvi za koje pouzdano znamo da su pokušavali dokazivati matematičke tvrdnje. No problem im je predstavljala njihova pretpostavka da su svake dvije istovrsne veličine, dakle primjerice svake dvije duljine, sumjerljive, odnosno da imaju omjer iznosa jednak omjeru dvaju prirodnih brojeva. Suprotno toj pretpostavci, neki pitagorejac je dokazao da dijagonala i stranica kvadrata (i/ili pravilnog peterokuta, slika 1) nisu sumjerljive – mi bismo danas rekli da im je omjer iznosa iracionalan broj. Čisto geometrijski pristup matematici u starih Grka i nepriznavanje brojeva osim prirodnih kao brojeva izazvalo je velike probleme jer se na precizan način nisu mogli dobiti rezultati koji bi uključivali ono što mi danas nazivamo drugim korijenom iz 2, omjerom zlatnog reza i sl.



Slika 1. Omjer zlatnog reza u pravilnom peterokutu i proporcionalnost/sličnost.

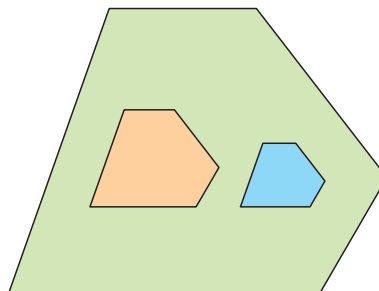
Eudoksova je zasluga precizno formuliranje teorije omjera i razmjera, uključujući proporcionalnosti, što je omogućilo u dokaze uključiti i bar neke od iracionalnih veličina. Primjerice, ono što mi danas označavamo kao $\sqrt{2}$ i zovemo duljinom dijagonale

kvadrata stranice 1, tj. ono s čime se pitagorejci nisu znali nositi, zahvaljujući Eudoksu postaje duljina d koja zadovoljava razmjer

$$a : d = d : (2a),$$

gdje je a duljina stranice bilo kojeg kvadrata (kaže se da je d srednja geometrijska proporcionala između a i $2a$), odnosno koristeći proporcionalnost mogli se dobiti precizne rezultate o $\sqrt{2}$ iako to u ono doba ne bi bilo prihvaćeno kao broj.

Naposlijetku istaknimo da se u VI. knjizi “Elementa”, koja vjerojatno također sadržajno potječe od Eudoksa, omjeri i razmjeri primjenjuju u čistoj geometriji, koja i jest bila polazište svih matematičkih rezultata starih Grka. Stoga nam 1. definicija VI. knjige “Elementa” (Dva uglasta lika zovemo sličnima ako su im odgovarajući kutovi jednaki i odgovarajuće stranice proporcionalne.) ujedno kaže da je prirodno (i povijesno) polazište proporcionalnosti u pojmu sličnosti geometrijskih likova (slika 2).



Slika 2. Proporcionalnost potječe iz geometrijskog konteksta – sličnosti likova.

LITERATURA

- 1/ F. M. Brückler (2017.): *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*, Springer Spektrum.
- 2/ Jost-Hinrich Eschenburg (2017.): *Sternstunden der Mathematik*, Springer Spektrum.
- 3/ D. E. Joyce (1998.): *Elements*, <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html> (1998) pristupljeno 18. 1. 2020.