

Matematičke zagonetke o višestrukim promjenama

– problemi H. E. Dudeneyja



Josip Sliško, Puebla, Meksiko

Zabavni problem u kojem se prodaje pola jajeta, predstavljen u prošlom broju Miš-a pod naslovom *Žena koja prodaje jaja stražarima* (Sliško, 2020.), postao je jedna od najpopularnijih matematičkih zagonetki u posljednja dva stoljeća. Razlog tome vjerojatno je psihološke prirode. Dok se ne-uobičajena prodaja primjerice pola jabuke još i može zamisliti, zdrav razum snažno se opire prihvatiti prodaju polovice jajeta. Dobre zagonetke namjerno stvaraju situacije koje na prvi pogled izgledaju nemoguće ili pak imaju prihvaljiv sadržaj, ali aktiviraju brzo mišljenje koje vodi do "očiglednog", ali pogrešnog rješenja (Kahneman, 2014.).

U XIX. stoljeću mogu se pronaći neke inačice ove zagonetke, a naslovljene su *Seoska žena i jaja* (Williams, 1844., str. 301) ili *Žena s tržnice i njezina jaja* (Hoffman, 1893., str. 173). U XX. stoljeću neki autori iskazuju istu zagonetku bez određenog naslova (Licks, 1917., str. 31; Northrop, 1944., str. 14).

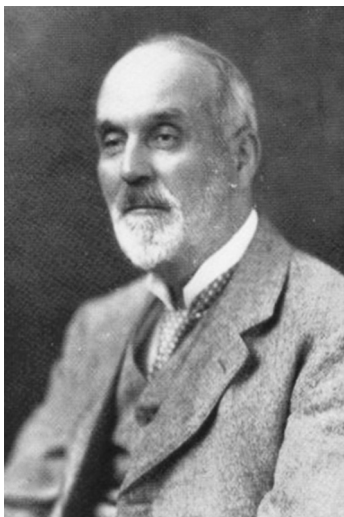
U XXI. stoljeću internet je postao glavni promotor "jajčane" zagonetke, premda se njezina popularnost održava i tiskanim knjigama, kako bez naslova (Botermans i Tichler, 2005., str. 97.), tako i s određenim naslovom, primjerice *Prodaja jaja* (Devi, 2008., str. 79).

Stoga nije nikakvo iznenađenje da jedna toliko dugovječna i popularna zagonetka zaintrigira najpoznatijeg britanskog i svjetskog autora zagonetki Henryja Ernesta Dudeneyja. Tema ovog članka su Dudeneyjeve inačice ovog problema, od najjednostavnije do krajnje ekstravagantne, kao i načini njihova rješavanja koje je on, iz nekog svog razloga, sustavno skrivao od čitatelja.

Henry Ernest Dudeney

Henry Ernest Dudeney (slika 1) smatra se najistaknutijim britanskim autorom zagonetki, kako po njihovoj impresivnoj količini, tako i po njihovoj fascinantnoj kvaliteti. Prvu zagonetku (uz simboličan honorar) objavio je kad je imao tek 9 godina u jednom časopisu za djecu.

Spektar njegovih interesa bio je širok, od aritmetičkih i geometrijskih matematičkih zagonetki do šahovskih problema i igara riječima. U svim je područjima nastojao i uspijevaao predlagati nove i još



Slika 1. Henry Ernest Dudeney
(10. travnja 1857. – 24. travnja 1930.)

zahtjevnije zadatke. Njegove su zagonetke objavljivane u najprestižnijim novinama i časopisima: *The Strand Magazine*, *Cassell's Magazine*, *The Queen*, *Tit-Bits* i *The Weekly Dispatch*.

Kasnije je Dudeney svoje najbolje matematičke zagonetke i igre riječima objavio u knjigama *The Canterbury puzzles and other curious problems* (Dudeney, 1907.), *Amusements in Mathematics* (Dudeney, 1917.a) i *Modern puzzles and how to solve them* (Dudeney, 1926.).

Dudeneyjeva najjednostavnija inačica problema o jajima

Dudeney je očigledno bio jako zainteresiran za zagonetke o višestrukim promjenama. U časopisu *The Weekly Dispatch* objavio je već 1897. godine svoju prvu zagonetku takvog tipa, vezanu za prodaju gusaka. Istu zagonetku ponavlja 1907. godine, uz novi naslov, u knjizi *The Canterbury puzzles*. Evo zagonetke.

Božićne guske

Gospodin Hembrow iz Weston Zoylanda – gdje god da bi to moglo biti – izložio je sljedeću aritmetičku zagonetku iz koje su vjerojatno potekle mnoge, prilično slične modernije inačice:

Farmer Rouse poslao je svog službenika Jabeza na tržnicu s jatom gusaka, rekavši mu da može prodati neke ili sve, kako misli da je najbolje jer je bio siguran da će čovjek dobro sklopiti posao. Evo izvješća koje je Jabez dao, ali bez starinskog dijalekta koji bi čitatelje mogao zbuniti na neželjeni način:

– Pa, prvo sam prodao pola jata plus pola guske gospodinu Jasperu Tyleru. Zatim sam prodao farmeru Aventu trećinu ostatka plus trećinu guske. Nakon toga sam četvrtinu preostalog plus tri četvrtine guske prodao kumu Fosteru. Na putu kući naletio sam ni na koga drugog nego na Neda Colliera, pa smo zajedno popili vrč jabukovače u "Ječmenoj krčmi", gdje sam mu prodao točno petinu preostalog jata i dao mu dodatnu petinu guske za njegovu gospođu. Devetnaest gusaka koje sam vratio natrag nisam se mogao riješiti ni pod koju cijenu.

Koliko je gusaka farmer Rouse poslao na tržnicu? (Dudeney, 1907., str. 60–61.)

Dudeney je čitateljima ponudio sljedeće rješenje:

Farmer Rouse poslao je na tržnicu točno **101** gusku. Jabez je prvo gospodinu Jasperu Tyleru prodao polovinu gusaka i još pola guske (tj. $50\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ili **51** gusku), a ostalo ih je **50**. Zatim je farmeru Aventu prodao trećinu ostatka i još trećinu guske (tj. $16\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ ili **17** gusaka), a oduzimajući ih od **50** dobiva se **33**. Zatim je prodao kumu Fosteru četvrtinu preostalog broja plus tri četvrtine guske (odnosno $8\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ ili **9** gusaka), pa mu je ostalo **24**. Zatim je Nedu Collieru prodao petinu ostatka i dao mu petinu guske "za gazdariću" (tj. $4\frac{4}{5} + \frac{1}{5}$ ili **5** gusaka), a ostalo ih je **19**. Zatim je ovih **19** gusaka vratio svom gazdi. (Dudeney, 1907., str. 164.)

Lako je vidjeti da Dudeney samo predstavlja krajnje rješenje i aritmetički dokazuje da je ono ispravno. Kao i kod mnogih zagonetki, nije dan cjelovit put do rješenja niti je predložena ideja vodilja za one koji žele doći do rješenja vlastitim pokušajima. U nastavku slijede dva moguća pristupa.

Metoda rješavanja unatrag

Ako se krajnjem broju gusaka doda $\frac{1}{5}$ (odnosno $19 + \frac{1}{5}$), dobit će se $\frac{4}{5}$ broja gusaka prije četvrtine prodaje. Taj se broj nalazi tako da se $(19 + \frac{1}{5})$ pomnoži s 5 i podijeli s 4:

$$\left(19 + \frac{1}{5}\right) \cdot 5 = 96 \quad \text{ i } \quad 96 : 4 = 24.$$

Ako se broju 24 doda $\frac{3}{4}$ (tj. $24 + \frac{3}{4}$), dobit će se $\frac{3}{4}$ broja gusaka prije treće prodaje. Taj se broj nalazi tako da se $(24 + \frac{3}{4})$ pomnoži s 4 i podijeli s 3:

$$(24 + \frac{3}{4}) \cdot 4 = 99 \quad \text{i} \quad 99 : 3 = 33.$$

Kad se broju 33 doda $\frac{1}{3}$ (odnosno $33 + \frac{1}{3}$), dobiva se $\frac{2}{3}$ broja gusaka prije druge prodaje. Taj se broj nalazi kada se $(33 + \frac{1}{3})$ pomnoži s 3 i podijeli s 2:

$$(33 + \frac{1}{3}) \cdot 3 = 100 \quad \text{i} \quad 100 : 2 = 50.$$

Kad se broju 50 doda $\frac{1}{2}$ (tj. $50 + \frac{1}{2}$), dobiva se polovina broja gusaka prije prve prodaje. Traženi broj gusaka je, dakle:

$$(50 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 100 + 1 = 101.$$

Metoda rješavanja unaprijed

Neka je početni broj gusaka x . Brojevi prodanih i preostalih gusaka pri svakoj prodaji s odgovarajućim algebarskim izrazima i operacijama navedeni su u tablici 1.

Kako je rečeno u zagonetki, broj preostalih gusaka nakon četvrte prodaje je 19. To znači da vrijedi:

$$\frac{x - 6}{5} = 19.$$

Rješenje te jednadžbe je $x = 101$.

Dudeneyjev originalni doprinos

Kako je Dudeney bio sklon matematički izazovnijim zagonetkama, izmislio je četiri zagonetke o višestrukim promjenama u kojima nije moguće primijeniti metodu rješavanja unatrag jer je ostatak neodređen. Korisno je razmotriti iskaze i rješenja Dudeneyjevih zagonetki takvog tipa. Tri se zagonetke, kako je već postalo uobičajeno, odnose na prodaju jaja, a četvrta na obiteljsku raspodjelu ora-ha.

1. zagonetka

Uz *Božićne guske*, u spomenutoj knjizi *Canterbury puzzles* našla se i zagonetka *Ekscentrična žena sa tržnice* (slika 2).



Slika 2. Ilustracija uz zagonetku *Ekscentrična žena sa tržnice*

Redni broj prodaje	Broj prodanih gusaka	Broj preostalih gusaka
Prva	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$	$x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$
Druga	$\frac{x-1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{x-1+2}{6} = \frac{x+1}{6}$	$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{6} = \frac{3x-3-x-1}{6} = \frac{2x-4}{6} = \frac{x-2}{3}$
Treća	$\frac{x-2}{12} + \frac{3}{4} = \frac{x-2+9}{12} = \frac{x+7}{12}$	$\frac{x-2}{3} - \frac{x+7}{12} = \frac{4x-8-x-7}{12} = \frac{3x-15}{12} = \frac{x-5}{4}$
Četvrta	$\frac{x-5}{20} + \frac{1}{5} = \frac{x-5+4}{20} = \frac{x-1}{20}$	$\frac{x-5}{4} - \frac{x-1}{20} = \frac{5x-25-x+1}{20} = \frac{4x-24}{20} = \frac{x-6}{5}$

Tablica 1. Brojevi prodanih i preostalih gusaka pri različitim prodajama

Ekscentrična žena s tržnice

Gospođa Covey koja drži malu farmu peradi u Surrey, jedna je od najekscentričnijih žena koje sam ikad upoznao. Njezin način poslovanja uvijek je originalan, a ponekad i prilično čudan i zadržavajući. Jednom su je čuli da objašnjava nekolicini svojih odabranih prijatelja kako je prodavala jaja tog dana. *Očito je ideju dobila iz stare zagonetke s kojom smo svi upoznati, ali kako je to poboljšanje*, ne oklijevam predstaviti je svojim čitateljima. Ispričala je da je toga dana odnijela određeni broj jaja na tržnicu. Polovicu ih je prodala prvom kupcu i dala mu još pola jajeta. Sljedećem je prodala trećinu preostalog i dala mu još trećinu jajeta. Zatim je prodala četvrtinu ostatka i dala još četvrtinu jajeta. Napokon je prodala petinu ostatka i dala još petinu jajeta. Tada je ono što joj je preostalo podijelila podjednako trinaestorici svojih prijatelja. I, čudno je reći, ali ona tijekom svih tih transakcija nije razbila niti jedno jaje. Zagonetka je sada pronaći najmanji mogući broj jaja koja je gospođa Covey mogla odnijeti na tržnicu. Možete li reći koliko? (Dudeney, 1907., str. 105.)

Ovaj je problem preoblikovana zagonetka o prodaji gusaka (u tekstu spomenute kao "stara zagonetka"). "Poboljšanje" koje spominje Dudeney odnosi se na njezinu složeniju matematičku strukturu i značajan porast stupnja matematičke zahtjevnosti. Naime, metoda rješavanja unatrag sada se ne može upotrijebiti jer nije poznat točan broj jaja koja na kraju nisu prodana, već su podijeljena prijateljima.

Dudeney daje sljedeći odgovor:

Najmanji broj jaja koja bi gospođa Covey mogla odnijeti na tržnicu je 719. Nakon što proda polovicu i da pola jajeta više, ostalo bi joj 359 jaja. Nakon druge prodaje ostalo bi 239 jaja, nakon treće prodaje 179 jaja, a nakon četvrte 143 jajeta. Ovaj posljednji broj mogla je ravnomjerno podijeliti trinaestorici svojih prijatelja, dajući svakom po 11 jaja, a da nije slomila niti jedno jaje. (Dudeney, 1907., str. 247.)

Strategija rješavanja temelji se na algebarskom modeliranju četiriju promjena. Neka je x početni broj jaja. Broj preostalih jaja nakon svake prodaje predstavljen je u tablici 2.

Rješavamo od onoga što je poznato: nakon četvrte prodaje ostaje broj jaja koji je višekratnik broja 13:

$$\frac{x-4}{5} = 13n.$$

Na taj način, početni broj jaja ovisi o cijelom broju n koji je jed-

nak broju jaja koje je gospođa Covey poklonila svakom od svojih 13 prijatelja:

$$x = 65n + 4.$$

Uz dovoljno strpljivosti moguće je aritmetički dokazati da je 11 minimalna vrijednost neparnog broja n . U slučaju manjih neparnih brojeva (1, 3, 5, 7 i 9), primjenom "algoritma prodaje", prije ili kasnije dolazi se do "dijelova jajeta".

Na taj je način početni broj jaja 719 ($65 \cdot 11 + 4 = 715 + 4$). U prvoj prodaji proda se 360 i ostaje 359 jaja. U drugoj prodaji proda se 120 i ostaje 239 jaja. U trećoj prodaji proda se 60 i ostaje 179 jaja. U četvrtoj prodaji proda se 36 i ostaje 143 jaja. Taj broj jaja čini mogućim da gospođa Covey pokloni 11 jaja svakom od svojih 13 prijatelja ($13 \cdot 11 = 143$).

2. zagonetka

Kao što njezin naslov kaže, i sljedeća se zagonetka o višestrukim promjenama bez ostatka odnosi na prodaju jaja.

Prodaja jaja

Žena je na tržnicu donijela određenu količinu jaja i neka od njih je prodala. Sljedećeg se dana, zahvaljujući njezinim kokošima, preostali broj jaja udvostručio pa je žena prodala isti broj jaja kao i prethodnog dana. Trećeg se dana novi ostatak utrostručio i žena je ponovno prodala isti broj jaja. Četvrtog se dana ostatak učetverostručio i prodaja je bila ista kao i prije. Petog se dana ostatak upeterostručio, žena je prodala potpuno isti broj jaja kao u svim prethodnim danima, a što je donijela na tržnicu, to se i prodalo. Koji je najmanji broj jaja koje je mogla donijeti na tržnicu prvoga dana i koliko ih je dnevno prodavala? (Dudeney, 1926., zagonetka 7, str. 10.)

Redni broj prodaje	Broj jaja koja preostaju nakon svake prodaje
Prva	$x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$
Druga	$\frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3x-3-x+1-2}{6} = \frac{2x-4}{6} = \frac{x-2}{3}$
Treća	$\frac{x-2}{3} - \frac{x-2}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4x-8-x+2-3}{12} = \frac{3x-9}{12} = \frac{x-3}{4}$
Četvrta	$\frac{x-3}{4} - \frac{x-3}{20} - \frac{1}{5} = \frac{5x-15-x+3-4}{20} = \frac{4x-16}{20} = \frac{x-4}{5}$

Tablica 2. Broj preostalih jaja nakon prodaje

Rješenje koje H. E. Dudeney navodi jest sljedeće:

Najmanji mogući broj jaja je **103**, a žena ih je svaki dan prodala **60**. Bilo koji višekratnik ovih dvaju brojeva bit će jedno moguće rješenje. Stoga je žena mogla započeti prodaju s **206** jaja i prodavati po **120** jaja dnevno ili s **309** i prodavati **180** dnevno. Međutim, tražen je najmanji mogući broj. (Dudeney, 1926., str. 102.)

Dudeney opet ne daje upute kako bi se moglo doći do takvog odgovora. Evo jedne mogućnosti:

Pretpostavimo da je početni broj jaja x i da je a broj jaja koje proda svaki dan. Nakon prvog dana broj jaja vraćenih s tržnice je $x - a$.

Drugog je dana otišla s dvostrukim brojem jaja $2(x - a)$ i prodala je opet a jaja. Broj vraćenih jaja je $2x - 3a$.

Trećeg dana otišla je s trostruko većim brojem jaja od tog: $6x - 9a$. Budući da je opet prodala a jaja, broj vraćenih jaja je $6x - 10a$.

Četvrtog je dana otišla s četverostrukim brojem jaja: $24x - 40a$. Kako je opet prodala a jaja, broj jaja vraćenih kući je $24x - 41a$.

Petog se dana taj broj jaja upeterostručio i postao $120x - 205a$. Nakon što je prodala a jaja, ženi nije prestalo niti jedno jaje. To znači da vrijedi:

$$120x - 206a = 0$$

ili

$$60x = 103a.$$

Minimalne vrijednosti za početni broj jaja i broj prodanih jaja svaki dan su $x = 103$ i $a = 60$. Promjene broja jaja u tom slučaju bile su sljedeće:

- Prvi dan žena odlazi sa **103** jaja, prodaje **60** jaja i vraća **43** jaja.
- Drugi dan odlazi s **86** jaja ($2 \cdot 43 = 86$), prodaje **60** jaja i vraća **26** jaja.
- Treći dan odlazi sa **78** jaja ($3 \cdot 26 = 78$), prodaje **60** jaja i vraća **18** jaja.
- Četvrtog dana odlazi sa **72** jaja ($4 \cdot 18 = 72$), prodaje **60** jaja i vraća **12** jaja.
- Peti dan odlazi sa **60** jaja ($5 \cdot 12 = 60$), prodaje **60** jaja i ne preostaje joj niti jedno jaje.

3. zagonetka

Ovo je još jedna zagonetka o višestrukim promjenama koja ne dozvoljava rješavanje unatrag. Situacija se ne odnosi na prodaju jaja, nego na obiteljsku raspodjelu kupljenih oraha. Dudeney je tu zagonetku objavio 1922. godine u mjesečniku *The Strand Magazine*. Nakon njegove smrti zagonetka je uključena u knjigu *Puzzles and curious problems* koju je uredila njegova supruga Alice Dudeney.

Razdioba oraha

Tetka Marta kupila je nešto oraha. Tommyju je dala jedan orah i četvrtinu ostatka, Bessie je tada dobila jedan orah i četvrtinu preostalog, Bob jedan orah i četvrtinu ostatka i, konačno, Jessie je dobila jedan orah i četvrtinu ostatka. Tada je primijećeno da su dječaci dobili točno **100** oraha više od djevojčica. Koliko je oraha tetka Martha zadržala za sebe? (Dudeney, 1922.a, str. 408; Dudeney, 1932., str. 40.)

Dudeney je dao sljedeće rješenje:

Na početku je bio **1021** orah. Tommy je dobio **256**, Bessie **192**, Bob **144** i Jessie **108** oraha. Tako su djevojčice dobile **300**, a dječaci **400** ili za **100** više od djevojčica, a tetka Marta je zadržala **321** orah za sebe. (Dudeney, 1922.b, str. 541; Dudeney, 1932., str. 143.)

Do ovog se rješenja ponovno dolazi algebarskim modeliranjem razdiobe oraha prema formulaciji zagonetke. Neka je x početni broj oraha.

1. Broj oraha koji dobiva Tommy je:

$$1 + \frac{x-1}{4} = \frac{4+x-1}{4} = \frac{x+3}{4}.$$

Broj oraha koji preostaje tetki Marthi je:

$$x - \frac{x+3}{4} = \frac{4x-x-3}{4} = \frac{3x-3}{4}.$$

2. Broj oraha koji dobiva Bessie je:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\frac{3x-3}{4} - 1}{4} &= 1 + \frac{\frac{3x-3-4}{4}}{4} \\ &= \frac{16+3x-7}{16} \\ &= \frac{3x+9}{16}. \end{aligned}$$

Broj oraha koji preostaje tetki Marthi je:

$$\frac{3x-3}{4} - \frac{3x+9}{16} = \frac{12x-12-3x-9}{16} \\ = \frac{9x-21}{16}.$$

3. Broj oraha koji dobija Bob je:

$$1 + \frac{\frac{9x-21}{16} - 1}{4} = 1 + \frac{\frac{9x-21-16}{16}}{4} \\ = \frac{64+9x-37}{64} \\ = \frac{9x+27}{64}.$$

Broj oraha koji preostaje tetki Marthi je:

$$\frac{9x-21}{16} - \frac{9x+27}{64} = \frac{36x-84-9x-27}{64} \\ = \frac{27x-111}{64}.$$

4. Broj oraha koji dobija Jessie je:

$$1 + \frac{\frac{27x-111}{64} - 1}{4} = 1 + \frac{\frac{27x-111-64}{64}}{4} \\ = \frac{256+27x-175}{256} \\ = \frac{27x+81}{256}.$$

Prema tekstu zagonetke, zbroj broja oraha koje su dobili Tommy i Bob je za stotinu veći od zbroja broja oraha koje su dobile Bessie i Jessie. To znači da vrijedi:

$$\frac{x+3}{4} + \frac{9x+27}{64} \\ = 100 + \frac{3x+9}{16} + \frac{27x+81}{256}.$$

Sređivanjem te jednadžbe dobiva se:

$$64x + 192 + 36x + 108 \\ = 25\,600 + 48x + 144 + 27x + 81,$$

ili:

$$25x = 25\,525.$$

Dakle, početni broj oraha x je 1021.

Lako je provjeriti da taj broj oraha točno određuje brojeve oraha koje je Dudeney naveo za dječake, djevojčice i tetku Marthu. Broj oraha koje je, primjerice, dobio Tommy je:

$$\frac{x+3}{4} = \frac{1021+3}{4} = \frac{1024}{4} = 256.$$

4. zagonetka

Najekstravagantnija Dudeneyjeva zagonetka o prodaji jaja, nazvana *Priča trgovca jajima*, pojavila se u svibnju 1917. godine u mjesečniku *The Strand Magazine*. To je bio kulturni časopis jer su u njemu objavljivali detektivske priče legendarni pisci Arthur Conan Doyle i Agatha Christie. Dudeneyjeva redovita kolumna *Nedoumice* (engl. *Perplexities*) trajala je puna dva desetljeća, od 1910. do 1930. godine. Evo te zagonetke.

Priča trgovca jajima

Preprodavač na jednoj od londonskih tržnica skupio je zalihu uvoznih jaja. Kad sam ga pitao koliko ih ima, odgovorio je:

– Dobio sam potpuno isti broj od svakog od svojih dvadeset i pet različitih uvoznika i, ako bih želio, mogao bih ih prodati poput stare gospode iz zagonetke.

Pitao sam: – Kako bi to bilo?

– O, znate, – odgovorio je, kroz smijeh. – Mogao bih polovicu prodati jednoj osobi i dati još pola jajeta, zatim prodati polovicu preostalog i dati još pola jajeta, i tako sve dok mi ne bi ostalo niti jedno jaje, a da nikada niti jedno jaje ne bude slomljeno.

Ako je to što je rekao čista istina, koji je najmanji broj jaja što je posjedovao čovjek? (Dudeney, 1917.b, str. 501.)

Rješenje koje je dao Dudeney bilo je sljedeće:

Čovjek je morao posjedovati **1 048 575** jaja, što je broj koji je jednak broju dva na dvadesetu potenciju manje jedan i koji je djeljiv s dvadeset i pet. To je najmanji broj koji će ispuniti uvjete. (Dudeney, 1917.c, str. 607.)

Ekstravagantnost ove zagonetke povezana je s tri-ma činjenicama:

1. Za početak njezinog rješavanja nužno je znati opću formulu za početni broj jaja N u slučaju kad nakon m prodaja ne preostane niti jedno jaje:

$$N = 2^m - 1.$$

2. Do traženog broja dolazi se kada se formula strpljivo primjenjuje za sve one vrijednosti broja m koje daju broj N koji je veći od 25 ($m > 5$) i koji je, kad se umanji za jedan, djeljiv s 25 bez ostatka. Prvi takav broj je $2^{20} = 1\,048\,576$. Kad mu se oduzme jedan, dobiva se traženi broj 1 048 575. Tada broj jaja koji je čovjeku dostavio svaki uvoznik iznosi $1\,048\,575 : 25 = 41\,943$.
3. U prvoj prodaji kupac kupuje 524 288 jaja. Korisno je smisao ove "matematičke kupovine" razmotriti u kontekstu realnog svijeta. Kad bi se moglo izbrojiti 100 jaja u jednoj sekundi, vrijeme potrebno za brojenje jaja bilo bi duže od 5200 sekundi ili skoro 90 minuta. Kako 20 malih jaja ima masu 1 kg, broj prodanih jaja imao bi masu najmanje 26 000 kg ili 26 tona. Za odvesti toliki broj jaja prvi bi kupac morao imati barem pet kamiona koji mogu prevoziti teret mase veće od 5 tona.

Implikacije za nastavu i učenje matematike

Dudeney je u literaturu o zagonetkama s višestrukim promjenama uveo novu kategoriju: zagonetke koje se ne mogu riješiti uobičajenom metodom rješavanja unatrag (Varošaneć, 2014.). Te zagonetke mogu biti zanimljivi i matematički izazovni problemi za nadarene učenike, bilo u aktivnostima školskih matematičkih grupa bilo u pripremama za razna natjecanja iz matematike.

Posebno je izazovna zagonetka *Priča trgovca jaja* ako joj se doda neki komentar koji upozorava učenike na njen ekstravagantan karakter u stvarnome svijetu i koji ih upućuje na istraživanje njezinih isključivo matematičkih svojstava.

Do formule $N = 2^m - 1$ za situaciju kada na kraju ne ostaje niti jedno jaje, obično se dolazi metodom poopćavanja. Ako je riječ o dvjema prodajama, početni broj jaja je 3. U slučaju triju prodaja koji je u literaturi i najpopularniji, početni broj jaja je 7. Kada se događaju četiri prodaje, početni broj jaja je 15. Od učenika se očekuje da "uoče" skrivenu numeričku strukturu ($3 = 2^2 - 1$; $7 = 2^3 - 1$ i $15 = 2^4 - 1$) te da zaključe kako bi za m prodaja početni broj jaja bio $N = 2^m - 1$. Napredniji bi

učenici mogli dobiti zadatak da tu formulu izvedu algebarskim modeliranjem "od početka".

Zadatak nalaženja Dudeneyjeva rezultata i većih brojeva oblika $N = 2^m - 1$ koji su djeljivi s 25 može potaknuti u učeniku i tehnološku snalažljivost i kreativnost: pronaći i koristiti dostupne internetske programe za računanje potencija broja 2 ili potražiti rješenje programiranjem s pomoću Microsoftova softvera Excel ili nekog profesionalnijeg paketa poput Matlab.

LITERATURA

- 1/ J. Botermans, H. Tichler (2005.): *The Big Brain Workout*, Sterling Publishing Company, New York.
- 2/ S. Devi (2008.): *More puzzles to puzzle you*, Orient Paperbacks, Delhi.
- 3/ H. E. Dudeney (1907.): *Cantenbury puzzles and other curious problems*, William Heinemann, London.
- 4/ H. E. Dudeney (1917.a): *Amusements in mathematics*, Thomas Nelson and Sons, Ltd., London.
- 5/ H. E. Dudeney (1917.b): The egg merchant's story, Puzzle 352, *The Strand Magazine*, 53 (May issue).
- 6/ H. E. Dudeney (1917.c): The egg merchant's story, Solution of the Puzzle 352, *The Strand Magazine*, 53 (June issue).
- 7/ H. E. Dudeney (1922.a): Distributing nuts, Puzzle 601, *The Strand Magazine*, 63 (May issue).
- 8/ H. E. Dudeney (1922.b): Distributing nuts, Solution of the Puzzle 601, *The Strand Magazine*, 63 (June issue).
- 9/ H. E. Dudeney (1926.): *Modern puzzles and how to solve them*, C. Arthur Pearson Ltd., London.
- 10/ H. E. Dudeney (1932.): *Puzzles and curious problems*, Edited by Alice Dudeney, Thomas Nelson and Sons, Ltd., London.
- 11/ L. Hoffmann (1893.): *Puzzles old and new*, Frederick Warne, London.
- 12/ D. Kahneman (2014.): *Misliti, brzo i sporo*, Mozaik, Zagreb.
- 13/ H. E. Licks (1917.): *Recreations in Mathematics*, D. van Nostrand Company, New York.
- 14/ E. G. Northrop (1944.): *Riddles in Mathematics. A Book of Paradoxes*, D. van Nostrand Company, Princeton, New York.
- 15/ J. Sliško (2020.): Zagonetke s višestrukim promjenama – Od Fibonaccija do Jacksona, *Matematika i škola*, 106, 29–34.
- 16/ S. Varošaneć (2014.): Metoda rješavanja unatrag, *Matematika i škola*, 77, 52–54.
- 17/ S. Williams (1844.): *The boy's treasure of sports, pastimes and recreation*, D. Bogue, London.