Opseg i površina kruga (za velike)

Josip Kličinović i
Tomislav Burić, Zagreb

Nōli turbāre circulōs meōs!
(Ne diraj moje kružnice!)

(Arhimed)

Učenici se već u 7. razredu osnove škole (ishod MAT OŠ D.7.4) upoznaju s formulama za opseg i površinu kruga. Za razliku od nekih drugih formula koje izvodimo od prethodno poznatih, kod formula za opseg i površinu kruga tome možemo samo donekle pribjeći. Koristimo se raznim trikovima kao što su omotavanje kružnice koncem kako bismo naslutili formulu za opseg ili rastavljanjem kruga na isječke koji onda presloženi izgledaju kao pravokutnik kako bismo naslutili formulu za površinu kruga. Korištenjem programa dinamičke geometrije zorno možemo vidjeti kako to izgleda. Štoviše, "igrajući" se parametrom n, već u ovoj dobi možemo na lagani način predstaviti neke ideje koje će se u nastavi koristiti kasnije. Pogledajte na GeoGebraTube uradak Udruge Normala o površini kruga: `http://bit.ly/p-krug` (pristupljeno 22. 10. 2020.).

Nakon što se spomenute formule obrade, uzimaju se zdravo za gotovo te se više ne postavlja pitanje "odakle to nama?". To jest, ne postavlja se pitanje može li se "pravim" matematički putem odrediti formule za opseg i površinu kruga.

Pravi trenutak za odgovoriti na to pitanje možemo dati u 4. razredu srednje škole, i to na dva načina: integriranjem – program koji u 4. razredu srednje škole ima 128 sati matematike u godini (4 sata tjedno), kako se radilo i do sada, te koristeći limese.

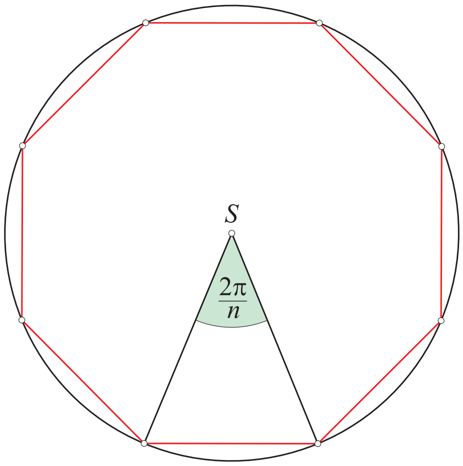
Josip Kličinović, prof. mentor, X. gimnazija Ivan Supek, Zagreb, `josip.klicinovic@skole.hr`
izv. prof. dr. sc. Tomislav Burić, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, `tomislav.buric@fer.hr`

Opseg kruga

Zadatak. Odredi formulu za opseg kruga.

Rješenje

Programom dinamične geometrije možemo zorno prikazati (poveznica na uradak: `http://bit.ly/o-p-krug`, pristupljeno 22. 10. 2020.) da ako u kružnicu polumjera r upisujemo pravilne n-terokute, pa prirodni parametar n povećavamo, taj će mnogokut sve više popunjavati krug. Promatrajući taj uradak, možemo zaključiti $o = \lim\limits_{n\to\infty} o_n$.



Slika 1.

Koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta, lako saznamo da je $a = 2r\sin\frac{\pi}{n}$. Odnosno, opseg pravilnog n-terokuta je $o_n = na = 2nr\sin\frac{\pi}{n}$. Zaključujemo da je opseg kružnice $o = \lim\limits_{n\to\infty} o_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2nr\sin\frac{\pi}{2}$.

Kako bismo izračunali ovaj limes, uvest ćemo supstituciju s pomoću koje prelazimo na limes u kojemu varijabla teži nuli. Jasno je da limes niza nema smisla promatrati kad varijabla teži nuli. Kako je niz ustvari diskretna funkcija, umjesto njega možemo promatrati limes funkcije. Jasno je da će onda limes funkcije ujedno biti i limes niza. U visokoškolskoj je matematici uobičajeno umjesto limesa niza promatrati limes funkcije jer će njihove vrijednosti biti jednake.

Računamo:

$$\begin{aligned} o &= \lim_{n\to\infty} 2nr\sin\frac{\pi}{n} = 2r\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{supst.} \\ n = \frac{1}{t},\ t\to 0 \end{array} \right\} = 2r\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin t\pi \\ &= 2r\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t\pi}{t\pi}\cdot\pi\right) = 2r\cdot\pi\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\pi}{t\pi} \\ &= 2r\pi\cdot 1 = \boxed{2r\pi}\,. \end{aligned}$$

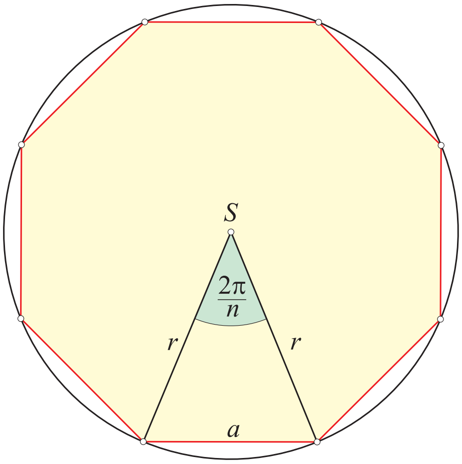
Prisjetimo se kako dolazimo do zaključka da je $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t\pi}{t} = \pi$. Naime, poznato je da vrijedi $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$, pod uvjetom da $f(x) \to 0$, kad $x \to a$. Vidljivo je da argument sinusa u brojniku i izraz u nazivniku moraju biti jednaki. Ovu relaciju koristimo u jednom posebnom slučaju $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. U računu nam nije slučaj da su argument sinusa u brojniku i funkcija u nazivniku jednaki, pa ćemo modificirati algebarski izraz na sljedeći način $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin t\pi}{\pi t}\cdot\pi\right)$. Jasno je da se množenjem izraza brojem 1 ne mijenja konačni rezultat. Prema teoremu o limesu umnoška i teoremu o limesu konstante možemo pisati $\pi\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t\pi}{t\pi}$. Imamo upravo situaciju da su argument sinusa u brojniku i izraz u nazivniku jednaki, pa zaključujemo $\pi\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t\pi}{t\pi} = \pi\cdot 1 = \pi$.

Površina kruga

Zadatak. Odredi formulu za površinu kruga.

Rješenje

Koristeći trigonometriju i površinu trokuta, što se obrađuje u 1. razredu srednje škole (trigonometrija pravokutnog trokuta), odnosno u 2. razredu srednje škole (površina trokuta), lako se može pokazati da vrijedi $P_n = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$.



Slika 2.

To slijedi izravno iz činjenice da je površina jednog karakterističnog trokuta jednaka polovini umnoška duljina susjednih stranica i sinusa kuta među njima.

Treba ustanoviti što se događa s tom površinom kad n teži u beskonačnost. Odnosno, promatramo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$.

Analogno izvodu za opseg, računamo:

$$
\begin{aligned}
P &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{r^2}{2} \lim_{n\to\infty} n \sin \frac{2\pi}{n} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \text{supst.} \\ n = \frac{1}{t},\ t \to 0 \end{array} \right\} = \frac{r^2}{2} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \sin 2t\pi \\
&= \frac{r^2}{2} \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin 2t\pi}{2t\pi} \cdot 2\pi \right) \\
&= \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi \lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t\pi}{2t\pi} \\
&= r^2\pi \cdot 1 = \boxed{r^2\pi}\,.
\end{aligned}
$$

Osvrt na kurikul

Premda je navedeni sadržaj van okvira sadržaja koji se uobičajeno radi u školi, moramo naglasiti da on ipak jest u skladu s kurikulom nastavnog predmeta Matematike za gimnazije i za strukovne škole na razini 4.2. Naravno, uvijek se može zadati boljim učenicima ili čak svim učenicima za razmišljanje. Pritom taj sadržaj zadovoljava određene ishode iz svih razreda godišnje satnice $140+140+105+96$, dok sama kruna dolazi u 4. razredu srednje škole. Ovaj je sadržaj možda primjereniji za učenike koji imaju "jaču" satnicu, ali se može iskoristiti i za darovite učenike "slabije" satnice ili kao projektni zadatak.

Također je važno napomenuti da je navedeni sadržaj prožet i svim matematičkim procesima objašnjenima u kurikulu nastavnog predmeta Matematika. Da podsjetimo, to su prikazivanje i komunikacija; povezivanje; logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje; rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije.

Za one koji žele još više: navedene formule su dobivene promatrajući upisane pravilne mnogokute. Iste formule izvedite koristeći **opisane** pravilne mnogokute.

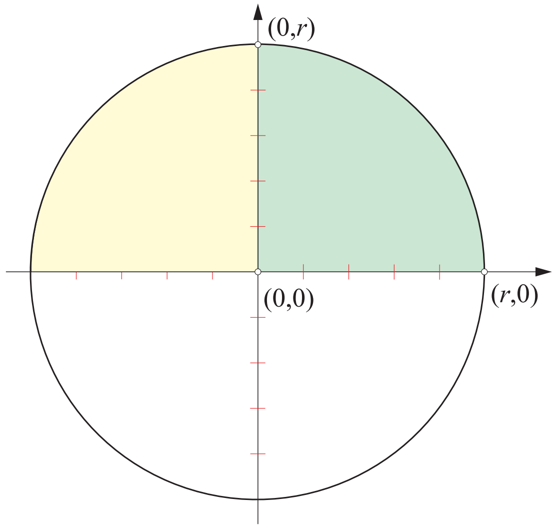
Površina kruga – integralom

Pogledajmo za kraj izvod formule za površinu kruga pomoću integrala, kako se to nalazi u udžbenicima Matematike za 4. razred gimnazija i tehničkih škola.

Zadatak. Odredi formulu za površinu kruga.

Rješenje

Promotrimo kružnicu polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, odnosno kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$. Prijelazom na eksplicitni zapis i promatrajući samo gornju polukružnicu, zaključujemo da je tražena površina $2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$. Možemo još jednostavnije – promatrajući samo dio kruga koji je u 1. kvadrantu, pa je tražena površina jednaka $4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$.



Slika 3.

Odredimo površinu:

$$P = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{supst.} \\ x = r\sin t;\ dx = r\cos t dt,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x = 0 \to r\sin t = 0 \to t = 0 \\ x = r \to r\sin t = r \to \sin t = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)}\cdot r\cos t dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= 4r^2\Big(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt\Big)$$

$$= 4r^2\cdot\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2r^2\cdot\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - 0 - \frac{\sin 0}{2}\Big)$$

$$= 2r^2\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{r^2\pi}\ .$$

Račun nije nimalo jednostavan i trivijalan. Na sličan se način, primjenjujući integrale na problem određivanja duljine luka ravninske krivulje, može izračunati duljina luka cijele kružnice odnosno njen opseg, što traži kompleksna znanja iz primjene integrala i obradu sadržaja koji uvelike premašuje opseg gradiva srednje škole.

Ovdje je potrebno posebno napomenuti odakle zaključak da je $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, a ne $|\cos t|$ (druga i treća jednakost). Naime, koristeći osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, lako je ustanoviti da je $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t|$. Supstitucijom je ustanovljeno da je $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a poznato je da je kosinus kuta u 1. kvadrantu nenegativan, stoga zaključujemo da u ovom slučaju vrijedi $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$.

LITERATURA

1/ B. Dakić, N. Elezović (2014.): *Matematika 4, 2. dio, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno--matematičke gimnazije*, Element, Zagreb.

2/ A. Antoliš, A. Copić (2007.): *Matematika 4, 2. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred prirodoslovno--matematičke gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb.

3/ I. Gusić, J. Gusić, M. Gusić (2015.): *Krug i elipsa*, Poučak (str. 20–31, broj 62, vol 16.), HMD, Zagreb.

4/ *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2*, NN 7/2019, NN 10/2019.