

Kako zapisati rezultat?

Jelena Gusić, Zagreb



Često je rezultat matematičkog zadatka numerički, a ako taj rezultat nije cijeli broj, postavlja se pitanje koju aproksimaciju njegovog decimalnog zapisa napisati kao odgovor. Učenici znaju biti u dilemi kada treba odabrati kako zapisati rezultat da bude prihvatljiv.

Najjednostavnije bi bilo da postoji propisana točnost rezultata. Kako takve odluke u našem sustavu nema, odluka o prihvaćanju ili neprihvaćanju ostaje na sastavljačima ispita. Kako predvidjeti te odluke i kako učenicima pomoći? Bi li dogovor oko propisane točnosti pomogao ili odmogao učenicima? Treba li nam takav dogovor?

Ova je problematika uključena, kako je to navedeno u Kurikulumu nastavnog predmeta Matematike, u matematičke procese:

- prikazivanje i komunikacija
- rješavanje problema i matematičko modeliranje
- primjena tehnologije.

Osvrnimo se, najprije, na uporabu džepnog računala.

Pogledajmo sljedeći zadatak.

Jelena Gusić, prof., XV. gimnazija, Zagreb

Zadatak 1.

Potrebno je izračunati $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. Koliko iznosi rezultat zapisan kao decimalan broj?

Ovim se zadatkom provjerava uporaba džepnog računala. Kako to znamo? Iz rezultata ne možemo zaključiti kako je učenik računao. Da smo željeli provjeravati svojstva operacija s korijenima, trebali smo jedan ili oba radikanda zamijeniti parametrom.

Mi bismo ovaj zadatak najvjerojatnije riješili na način da pojednostavnimo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ i onda decimalni zapis dobijemo uporabom džepnog računala:

$$\sqrt{6} \dots\dots\dots 2.449489743$$

Neki će učenici upisati direktno kako je zadano i, naravno, dobiti isti rezultat.

$$\sqrt{2}\sqrt{3} \dots\dots\dots 2.449489743$$

Sad se postavlja pitanje zapisa tog rješenja (prikazivanje i komunikacija). **Točne** aproksimacije rezultata 2.449489743 su

2, 2.4, 2.45, 2.449, 2.4495, 2.44949,
2.449490, 2.4494897, 2.44948974.

Koje su od tih aproksimacija prihvatljive kao točan odgovor?

Većini je "jasno" da 2 ne bi bio prihvatljiv odgovor, ali koji bi rezultat bio? U odgojno-obrazovnim ciljevima učenja i poučavanja predmeta Matematika navodi se da će učenici: *rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije te preispitivanjem procesa i rezultata, po potrebi uz učinkovitu uporabu odgovarajućih alata i tehnologije*¹.

Preispitivanjem rezultata dobije se:

$$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = 6$$

2^2	4
2.4^2	5.76
2.45^2	6.0025
2.449^2	5.997601
2.4495^2	6.00005025
2.44949^2	6.00000126
2.4494897^2	5.99999979
2.44948974^2	5.999999986
2.449489743^2	6.000000001

Uvidom u dobivene vrijednosti prihvatljivo je da 2 i 2.4 ne bi bili "dobri" rezultati.

Postoji još jedan argument zbog čega 2.4 ne bi bio prihvatljiv odgovor. Neki bi učenici zadatak mogli rješavati ovako:

$\sqrt{2}$	1.414213562
$\sqrt{3}$	1.732050808
$1.41 \cdot 1.73$	2.4393

pa bi rezultat koji su dobili, a koji je konačan broj, mogli zaokružiti na 2.4. Ovaj postupak nije prihvatljiv u zadatku u kojemu se provjerava uporaba džepnog računala. Da uporaba tehnologije nije dopuštena, očekivani postupak bio bi upravo takav – pokazati poznavanje aproksimacija korijena na 1 – 2 decimale (napamet ili iz tablica) i ručno množenje. U slučaju uporabe tehnologije učenici trebaju pokazati da znaju **učinkovito** koristiti džepno računalo, što pokazni postupak nije (jer nije efikasan ni vremenski, a ni po preciznosti).

Važno je napomenuti da kada bi se donijelo pravilo kako zapisati decimalni broj u odgovoru, to bi pravilo govorilo o točnosti rezultata. Učenici bi trebali znati da koraci u računu trebaju biti precizniji od konačnog odgovora. Tako, u prethodnom zaokruživanju $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ na dvije decimale, rezultat nije točan na dvije decimale.

Usput napomenimo da je rješenje koje nam je dalo džepno računalo – broj 2.449489743, zaokruženo na devetoj decimali. Kada bismo traženi rezultat zapisali preciznije, tada bi rezultat bio 2.449489742783... Neki drugi tip džepnog računala dao bi rezultat 2.449489742 u kojemu nije zaokružena posljednja prikazana znamenka.

Svakako bi bilo preporučljivo s učenicima o ovome diskutirati i to ne samo na složenim primjerima, već i na jednostavnim, kako bi uočili problem i kako bi shvatili da za efikasno korištenje džepnog računala moraju poznavati i matematičke sadržaje i računalo.

¹ https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1.71.pdf

Pogledajmo sljedeći zadatak u kojemu tehnologija nije problem, ali jest ono što se u kurikulumu naziva **rješavanje problema i matematičko modeliranje**. U zadatku je model zadan formulom, a učenik treba pokazati da može provesti interpretaciju problema.

Zadatak 2.

U nekoj su tvornici uočili da se broj proizvoda $B(t)$, koje zaposlenik napravi u jednom danu ponaša prema formuli

$$B(t) = 63 - 29.4 \cdot 2^{-0.54t},$$

gdje je t broj mjeseci nakon što je zaposlenik započeo izradu tih proizvoda. Koliko je proizvoda, prema toj formuli, zaposlenik mogao proizvesti u jednom danu

- u kojem je započeo izradu tih proizvoda
- 8 mjeseci nakon što je započeo izradu tih proizvoda?

Rješenje.

- Treba odrediti vrijednost funkcije za $t = 0$.

$$\begin{aligned} B(0) &= 63 - 29.4 \cdot 2^{-0.54 \cdot 0} \\ &= 63 - 29.4 \cdot 2^0 \\ &= 63 - 29.4 = 33.6. \end{aligned}$$

Isto nam daje i džepno računalo:

$$\begin{array}{r} 63-29.4*2^{-0.54*0} \\ \hline 33.6 \end{array}$$

Sada je potrebno interpretirati vrijednosti funkcije i rezultat.

Očekujemo da je vrijednost funkcije cjelobrojna (broj proizvoda), pa rješenje 33.6 nije prihvatljivo. Po zadanom modelu zaposlenik ne uspije napraviti cijeli trideset četvrti proizvod, stoga je odgovor 33 proizvoda. Prihvatljivo je i "33 proizvoda i dio trideset četvrtog", "gotovo 34" i slično, ali ne i odgovor 34.

- Sličan se problem pojavljuje kod vrijednosti funkcije za $t = 8$:

$$B(8) = 63 - 29.4 \cdot 2^{-0.54 \cdot 8} = 61.5280341 \dots$$

$$\begin{array}{r} 63-29.4*2^{-0.54*8} \\ \hline 61.5280341 \end{array}$$

Ovdje džepno računalo učenicima ne bi trebalo predstavljati problem. U sljedećem računu vidimo da i učenici koji ne znaju efikasno koristiti džepno računalo, već moraju prepisivati međukorake, dobiju rezultat zadovoljavajuće preciznosti.

$$\begin{array}{r} 0.54*8 \\ \hline 4.32 \\ 2^{-4.32} \\ \hline 0.0500668673 \\ 29.4*0.05 \\ \hline 1.47 \\ 63-1.47 \\ \hline 61.53 \end{array}$$

Kako smo već prije analizirali situaciju, znamo da zaposlenik nije uspio završiti 62. proizvod, pa je odgovor 61, a ne 62 kako se dobije pravilnim zaokruživanjem na cijeli broj.

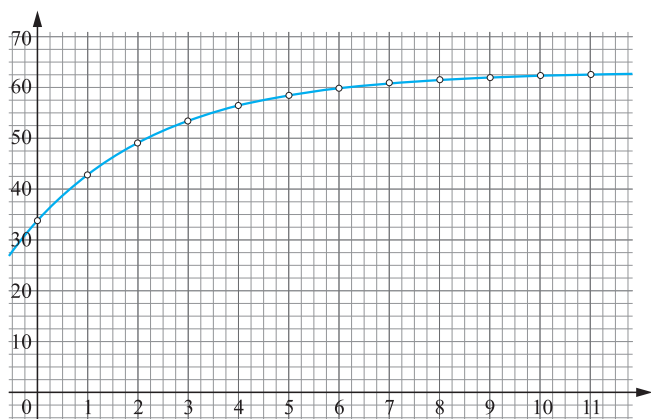
Da je to doista tako, vidimo jer niti 9 mjeseci nakon što je započeo izradu tih proizvoda dnevna proizvodnja nije 62:

$$\begin{array}{r} 63-29.4*2^{-0.54*8} \\ \hline 61.5280341 \\ 63-29.4*2^{-0.54*9} \\ \hline 61.98762467 \end{array}$$

Iz grafičkog prikaza možemo bolje vidjeti o čemu se radi u zadatku. Graf zadane funkcije

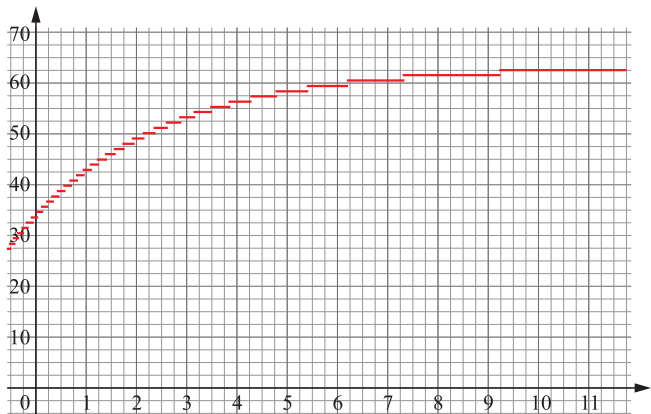
$$B(t) = 63 - 29.4 \cdot 2^{-0.54t}$$

prikazan je na slici 1.



Slika 1.

Vrijednosti funkcije na domeni $[0, \infty)$ (prirodnoj za ovaj zadatak) su iz intervala $[33.6, 63)$. Funkcija $B(t)$ u realnom životu poprima samo cjelobrojne vrijednosti iz intervala $[33, 63)$. Ako želimo pokazati funkciju koja poprima samo cjelobrojne vrijednosti, onda se to vidi na grafu prikazanom na slici 2.



Slika 2.

Analizom grafa primjećujemo kako funkcija u početku brzo mijenja vrijednosti, a kasnije je potreban duži vremenski interval da bi se vrijednost funkcije povećala za 1 te nakon što postigne vrijednost 62 na toj vrijednosti i ostaje (jer je $y = 63$ asimptota funkcije).

Moguće je čuti pritužbe učenika ako im se ne prizna odgovor 62 u b) zadatku da su oni sve točno napravili. I doista, da je zadatak bio odrediti $B(8)$

za funkciju $B(t) = 63 - 29.4 \cdot 2^{-0.54t}$ i odgovor zaokružiti na cijeli broj, tada bi točan odgovor bio 62. Učenicima bi trebalo osvijestiti razliku između ta dva zadatka – jedan je zadatak u kojemu se traži procedura, a drugi je zadatak matematičkog modeliranja gdje je potrebna analiza rješenja. Ta dva zadatka mogu, ali, kao što smo vidjeli u ovom primjeru, ne moraju imati isto rješenje.

Česta je primjedba učenika da je i tako sve to samo "otprilike" pa će možda neki zaposlenik uspjeti napraviti baš 62 proizvoda. Tu su učenici potpuno u pravu. Neki će zaposlenik možda napraviti i 65 (mada model to ne predviđa), a neki samo 53 proizvoda, ali mi ne pitamo što je stvarno bilo (to bi se odredilo statističkim pokusom u tvornici), već što naš model o tome kaže.

Nešto više o takvoj preciznosti možemo vidjeti u sljedećem zadatku.

Zadatak 3.

Marija je "na dijeti od 1500 kcal". Već je pojela 1350 kcal. Koju količinu mrkve može još pojesti ako 100 g mrkve ima 41 kcal?

Postupak je prikazan u računu:

$$\begin{array}{r}
 1500 - 1350 \\
 \hline
 \text{Ans} / 41 \quad \quad \quad 150 \\
 \hline
 \text{Ans} * 100 \quad \quad \quad 3.658536585 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 365.8536585
 \end{array}$$

Kako zapisati rezultat?

Svaki od približnih rezultata

$$\begin{array}{l}
 370, 366, 365.9, 365.85 \\
 365.854, 365.8537 \dots
 \end{array}$$

prihvatljiv je kao odgovor što vidimo preispitivanjem rezultata:

g mrkve	kcal	ukupne kalorije
370	151.7	1501.7
366	150.06	1500.06
365.9	150.019	1500.019
365.85	149.9985	1499.9985
365.854	150.00014	1500.00014
365.8537	150.000017	1500.000017

Ipak, možemo se upitati ima li smisla odgovor: *Marija može pojesti 365.854... g mrkve?*

Važno je znati:

- kakvu vagu Marija ima – ako vaga nema dijelove grama (što je dosta često na kućnim vagama), nema smisla zapisati rezultat **365.9 g**
- može li se odrezati mrkva tako da dobijemo točno **366 g**
- odgovaraju li podatci o kalorijama² mrkvi koju Marija ima.

Sva ova pitanja pokazuju da ovdje nije potrebno odgovarati jako precizno. Ipak, račun se mora provesti s podacima koji su zadani, a prilagođavanje se radi tek na samom kraju. Vrednovanje matematičke komunikacije u kojoj učenik *iznosi svoja razmišljanja, postavlja pitanja i odgovara na pitanja koja nadilaze opseg izvorno postavljene pitanja*³, omogućavaju učeniku da prepozna realni kontekst ovog pitanja, tako da čak i odgovori **350 g**, **400 g** i slično, mogu biti prihvatljivi uz prethodno proveden i prikazan račun i obrazloženje odgovora.

Čak i preispitivanjem rezultata

g mrkve	kcal	ukupne kalorije
350	143.5	1493.5
400	164	1514

vidimo da najlošija aproksimacija (**400 g**) ima grešku manju od **1 % (0.93 %)**.

Također moramo biti svjesni da to ne znači kako je prihvatljiv bilo koji rezultat iz intervala **[350, 400]**. Da bi rezultat bio prihvatljiv, on mora slijediti iz točnog postupka. Ako rezultat nije točno zaokružen, treba obrazložiti zašto to nije učinjeno. Recimo, odgovor **360 g** može biti prihvaćen ako učenik kaže da je vidio kako neke sorte mrkve imaju prosječnu težinu **60 g**, pa Marija može pojesti **6** takvih mrkava i bez vaganja. Međutim, učenici bi morali biti jako maštoviti da bismo prihvatili odgovor poput **364.27 g**. Pri ovom odgovoru Marija bi ukupno pojela **1499.3507... kcal**, što je **0.6493 kcal** manje, pa je greška **0.043... %**, dakle zanemariva, ali točnim računom, čak i površnim zaokruživanjem, nemoguće je dobiti taj rezultat.

Ovdje smo se dotaknuli nekih problema koji se pojavljuju u vrednovanju numeričkih rješenja matematičkih zadataka i pokušali ilustrirati da su razlozi zašto rezultate ne aproksimiramo po istim pravilima matematičke prirode, a ovise o ishodu koji se zadatkom provjerava. Aproksimacija rješenja povezana je s kontekstom u kojem se problem i njegovo rješenje nalaze, a argumentiranje i interpretiranje rješenja u kontekstu je bitan element matematičke komunikacije koji želimo da svi učenici usvoje.

Nešto više o prikazivanju rješenja možete naći i na stranici NCVVO: <https://mk0ncvvot6usx5xu4d.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2017/10/MAT-dodatak.pdf>.

² Podatci preuzeti sa stranice: <https://www.fitness.com.hr/prehrana/nutricionizam/Tablica-kalorija-povrce.aspx>

³ https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1.71.pdf