Matematičke zagonetke o višestrukim promjenama

– od Fibonaccija do Jacksona

Josip SlIško, Puebla, Meksiko

John Jackson bio je engleski privatni učitelj matematike. Godine 1821. objavio je u Londonu knjigu "*Pametna razonoda za zimske večeri*" (Jackson, 1821.). Njegova ideja bila je sakupiti na jednom mjestu, u nevelikoj i pristupačnoj knjizi, zanimljive zagonetke iz aritmetike, geometrije i geografije koje su bile raspršene u mnogo drugih publikacija. Neke od tih publikacija iz kojih je Jackson preuzimao svoje zagonetke za široku publiku imale su prezahtjevnu matematičku razinu i odbijajuće brojeve stranica.

David Wells, poznati engleski stručnjak o zagonetkama, o Jacksonovoj je knjizi napisao sljedeće:

"Zbog njezine velike rijetkosti, može se zaključiti da se knjiga nije prodala u velikom broju primjeraka što je sramota jer je, pored svog izvrsnog naslova, sadržavala mnoge klasične zagonetke i neke koje se nisu ranije pojavile u tiskanom obliku..." (Wells, 1992., str. 43.).

U ovom radu prikazat ćemo četiri Jacksonove matematičke zagonetke o višestrukim promjenama i metode njihovog rješavanja. Matematički problemi ili zagonetke o višestrukim promjenama odnose se na situacije u kojima dolazi do sukcesivnih promjena neke veličine u dva koraka. Prvi korak je promjena opisana nekim razlomkom, a drugi korak može biti cjelobrojna promjena ili promjena povezana s istim ili drukčijim razlomkom. Obično se daje krajnja vrijednost veličine koja se mijenja, a traži se njezina početna vrijednost. Uobičajeni način nalaženja početne vrijednosti je **metoda rješavanja unatrag** (Varošanec, 2014.).

Prije razmatranja konkretnih formulacija Jacksonovih zagonetki o višestrukim promjenama, korisno im je dodati povijesnu perspektivu i pogledati kada i u kojem su se obliku takvi "zabavni problemi" pojavili u europskoj matematici. Ti problemi očigledno nisu imali nikakvu praktičnu primjenu u trgovačkim poslovima kao što su računanje marže, profita, zamjene valuta ili pretvaranje mjernih jedinica. Međutim, oni su matematičarima otvorili mogućnost predlaganja i rješavanja nekih problema s matematičkim strukturama na nov način koji može zamisliti jedino razigrana kreativna mašta.

Josip SlIško, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, `josipslisko47@gmail.com`

Fibonacci i problemi višestrukih promjena

Leonardo iz Pise, Leonardo Fibonacci, ili samo Fibonacci (slika 1) bio je talijanski matematičar kojeg mnogi smatraju najznačajnijim matematičarem srednjega vijeka.

Slika 1. Fibonacci (1170. – 1250.)

Njegova velika zasluga je popularizacija uporabe arapskih brojki u Europi te sustavno izlaganje aritmetičkog (i početnog algebarskog!) načina rješavanja velikog broja matematičkih problema. Najpoznatiji je po uvođenju niza brojeva koji danas nosi njegovo ime – Fibonaccijevi brojevi. Oni su se pojavili kao rješenje u problemu višegeneracijskog razmnožavanja zečeva, a danas se zna da imaju mnogobrojnu primjenu u "matematičkom razumijevanju" raznih prirodnih struktura (Posamentier i Lehmann, 2007.).

Fibonaccijevo najpoznatije djelo *Liber abaci* ("Knjiga o računanju") ugledalo je svjetlost dana 1202. godine (slika 2), kao opširan matematički udžbenik za teoriju i praktične primjene znanosti o brojevima.

Engleski prijevod knjige objavljen je tek 800 godina kasnije (Sigler, 2002.), a vrlo informativan prikaz njezinog sadržaja i povijesnog značaja za široku publiku pojavio se 2011. godine (Devlin, 2011.).

Slika 2. Jedna stranica iz *Liber Abaci*

Daleke preteče Jacksonovih zagonetki su dva Fibonaccijeva "zabavna problema" iz "Knjige o računanju". Prvi problem je sljedeći:

O onome koji je otišao u Vrt užitaka sakupljati jabuke

"Neki je čovjek ušao u Vrt užitaka kroz 7 vrata i uzeo odatle određeni broj jabuka. Kad je želio otići, morao je prvom vrataru dati polovicu broja svih jabuka i još jednu. Drugom vrataru dao je polovicu broja preostalih jabuka i još jednu. Slično je dao i ostaloj petorici vratara, a njemu je na kraju ostala jedna jabuka. Traži se koliko je jabuka taj čovjek bio ubrao u vrtu.

Radi ovako: Jabuci koja mu je na kraju ostala dodaj jednu jabuku koju je dao posljednjem vrataru. Bit će ih 2 i taj broj udvostruči. Bit će 4 i toliko jabuka je imao čovjek kada je došao do posljednjeg vratara. Tome dodaš jabuku koju je dao šestom vrataru. Bit će ih 5 i taj broj udvostruči. Bit će ih 10 i toliko mu je ostalo nakon što je napustio peta vrata. Tome dodaj jednu jabuku za petog vratara. Bit će ih 11 i taj broj udvostruči. Bit će ih 22 i njima dodaj 1 jabuku koju je dao četvrtom vrataru. Bit će ih 23 i taj broj udvostruči. Bit će ih 46 i njima dodaj 1 jabuku koju je dao trećem vrataru. Bit će ih 47 i taj broj udvostruči i dobit ćeš 94. Tome dodaj jednu jabuku koju je dao drugom vrataru. Bit će ih 95 i taj broj udvostruči. Bit će ih 190 i njima dodaj jednu koji je dao na prvim vratima i udvostruči taj iznos. Bit će ih 382 i to je ukupan broj jabuka.

Na taj način, obrtanjem izloženog redoslijeda moći ćeš riješiti bilo koji sličan problem." (Sigler, 2002., str. 397–398.)

Ovaj Fibonaccijev način rješavanja zadatka u današnjoj pedagoškoj literaturi nazivamo "metoda rješavanja unatrag", a zadatak spada u tip zadatka s ostatcima (Varošanec, 2104.).

Lako je vidjeti da su u ovom slučaju opisane promjene ujednačene: naknadni broj jabuka dobiva se tako da se prethodni broj jabuka *dijeli s dva*, a potom se od jedne polovice *oduzima jedna jabuka*. Broj promjena je sedam i konačni ostatak je jedna jabuka.

"Obrtanje predloženog rasporeda" (metoda rješavanja unatrag) implicira inverziju i aritmetičkih operacija i njihovog redoslijeda. Da bi se našao prethodni broj jabuka, preostalom broju jabuka se prvo *dodaje jedna jabuka*, a onda se dobiveni broj *množi s dva*. Fibonacci je problem riješio i algebarski, nazivajući početni broj jabuka "stvar". U sedam koraka je dobio rezultat da je "stvar" podijeljena sa 128 jednaka $2\frac{63}{64}$ (dva plus $\frac{63}{64}$). Koristeći današnji algebarski zapis, Fibonaccijevo bi rješenje glasilo:

$$\frac{x}{128} = 2\frac{63}{64} = 2 + \frac{63}{64}.$$

Odatle je, kao i ranije, početni broj jabuka

$$x = 256 + 126 = 382.$$

U drugom problemu Fibonacci je značajno poopćio zamišljene promjene, povećavajući njihov broj (do deset!) i eliminirajući ujednačenost. Evo tog problema:

O čovjeku koji napušta grad s deset vrata

"Neki čovjek koji ima bezante* želio je napustiti određeni grad, pri čemu treba proći kroz 10 vrata. Na prvim vratima mora dati $\frac{2}{3}$ svojih bezanata i još $\frac{2}{3}$ jednog bezanta. Na drugim vratima (daje) polovicu bezanata koje je nosio i još $\frac{1}{2}$ jednog bezanta. Na trećim vratima (daje) trećinu i još $\frac{1}{3}$ jednog bezanta. Na četvrtim vratima (daje) četvrtinu i još $\frac{1}{4}$ jednog bezanta, i tako redom do desetih vrata, gdje je dao desetinu bezanata koje je nosio i $\frac{1}{10}$ jednog bezanta. Ostao mu je jedan bezant. Traži se koliko je bezanata čovjek imao na početku." (Sigler, str. 443–444.)

Fibonacci i za ovaj zahtjevan problem nudi dva načina rješavanja. Prvi način je "obrtanje predloženog rasporeda" (metoda rješavanja unatrag), a drugi je netransparentna i dosta duga uporaba algoritma proporcionalnosti, a da se ne pojavljuje termin "stvar". U oba postupka početni broj bezanata je 59.

Jackson i četiri zagonetke o višestrukim promjenama

U odnosu na ono što je opisao Fibonacci, Jacksonov pristup zagonetkama o višestrukim promjenama ima i sličnosti i razlika. Glavna sličnost je, naravno, povezanost s matematičkim strukturama koje modeliraju promjene i koje je Fibonacci davno ustanovio. Za razliku od Fibonaccija koji svojim problemima daje informativan i lako pamtljiv naziv, Jackson svojim zagonetkama, kako je već postalo uobičajeno, samo pridružuje redni broj. Dok Fibonacci ima zadataka i s deset promjena, maksimalan broj promjena kod Jacksona je četiri. Međutim, najveća i najznačajnija razlika je u načinu predstavljanja rješenja. Fibonacci ne očekuje da čitatelj pokuša sam riješiti problem, već mu odmah nudi rješenje. Jackson postupa potpuno drukčije i u uvodu kaže sljedeće:

"Mladim čitateljima posebno se preporučuje da svako pitanje pošteno pokušaju sami riješiti prije nego potraže pomoć u danim rješenjima. Ista se sugestija može dati i onima u zrelim godinama, koji će, također se nadamo, pronaći nešto zabave u ovom malom svesku."

Jackson je shvatio da zabavnost matematičkih zagonetki za široku publiku leži u aktivnoj višestrukoj interakciji sa zagonetkama i u radosti koja se osjeti kada se do rješenja dođe vlastitim intelektualnim naporom i uspješnim izbjegavanjem "mentalnih zamki" koje karakteriziraju najbolje "rekreativne probleme".

Jaksonovi načini preuzimanja prethodno objavljenih zagonetki

U Engleskoj je popularnost područja "zabavnih zagonetki" dobila značajan impuls pojavom Huttonova prijevoda čuvenog djela francuskog matematičara Jacquesa Ozanama *Rècrèations mathèmatiques et physiques*, objavljenog u četiri sveska

* Bezant je u Fibonaccijevo vrijeme bio naziv za jedinicu zlatnog novca.

(Hutton, 1803.). Prvo francusko izdanje tog djela izašlo je 1694. godine, a engleski prijevod se bazirao na francuskom izdanju iz 1778. godine koje je Montucla uredio i značajno proširio. Iz tih *Matematičkih rekreacija*, Jackson preuzima dva problema (Hutton, 1803., Problem XV i njegova varijacija, str. 203.).

Prvo preuzimanje je gotovo doslovno i preuzetoj zagonetki bi neki sljedbenik Fibonaccija vjerojatno pridružio sljedeći naslov:

Žena koja prodaje jaja stražarima

"Seoska žena nosila je jaja u garnizon s namjerom da ih proda i trebala je proći pored trojice stražara. Prvom je (stražaru) prodala polovinu broja jaja koje je imala i još pola jajeta. Drugom (stražaru je prodala) polovinu broja preostalih jaja i još pola jajeta. Trećem (stražaru je prodala) polovinu broja preostalih jaja i još pola jajeta. Kad je stigla na tržnicu, imala je još tri tuceta za prodati. Kako je to bilo moguće bez razbijanja bilo kojeg jajeta? (Jackson, 1821., str. 19–20.).

Ponuđeno Jacksonovo rješenje je:

"Čini se na prvi pogled da je ovaj problem nemoguć jer nije moguće pretpostaviti da se pola jajeta može prodati, a da se nijedno ne razbije. Međutim, mora se shvatiti da uzimajući "veću polovicu" neparnog broja, uzimamo točnu polovicu $+\frac{1}{2}$. Stoga će se utvrditi da su ženi, prije nego što je prošla posljednjeg stražara, preostala 73 jaja. Prodajući 37 jaja tom stražaru, što je polovica (od 73) $+\frac{1}{2}$, preostalo bi joj 36 jaja. Na sličan je način, prije nego što je došla do drugog stražara, imala 147 jaja i prije nego što je došla do prvog 295 jaja. (Jackson, 1821., str. 77.)

Algoritam rješavanja čitatelju je jasniji ako se kaže da se prethodni broj jaja dobije tako što se preostalom broju jaja doda $\frac{1}{2}$ i da se taj zbroj udvostruči. Ako je broj jaja na kraju bio 36, nakon dodavanja $\frac{1}{2}$ imamo 36.5 jaja, a nakon množenja s dva dobije se 73, što je broj jaja prije prodaje trećem stražaru.

U preuzimanju sljedeće zagonetke Jackson je nešto kreativniji u formulaciji. Zadržava kontekst, ali povećava broj promjena s tri na četiri. Tako je nastala zagonetka koja bi se, u Fibonaccijevu pristupu, mogla nazvati ovako:

Čovjek koji kupuje potrepštine

"Jedan čovjek je izašao s određenim brojem gvineja kod sebe kako bi kupio potrepštine u različitim trgovinama. U početku je potrošio polovicu broja gvineja koji je imao i još pola gvineje više. U drugoj trgovini (je potrošio) polovicu ostatka i još pola gvineje više. Tako je bilo u trećoj i četvrtoj trgovini. Na kraju je, plativši sve svoje potrepštine, otkrio da je dao sav svoj novac. Koliko je gvineja imao u početku? (Jakson, 1821., str. 18.)

U Huttonovoj knjizi problem se odnosio na tri spomenute promjene, pa je rješenje 7 gvineja. To je rješenje odmah navedeno i pokazana je njegova ispravnost. Međutim, nije navedeno kako se dolazi do njega. Jackson je ispravio taj značajan nedostatak. Njegovo pojednostavljeno rješenje je:

"Očito je da je u četvrtu trgovinu ušao imajući 1 gvineju. Znači da je sa $1\frac{1}{2}\cdot 2=3$ gvineje (ušao) u treću trgovinu i sa $3\frac{1}{2}\cdot 2=7$ gvineja u (ušao) u drugu trgovini. Dakle, na početku (prije ulaska u prvu trgovinu) je imao $7\frac{1}{2}\cdot 2=15$ gvineja." (Jackson, 1821., str. 75.)

Jasnije iskazan Fibonaccijev algoritam "obrtanja predloženog rasporeda" bi bio: prethodni broj gvineja dobije se tako da se ostatku doda jedna polovina i da se rezultat udvostruči.

Treća preuzeta zagonetka, s najvećim udaljavanjem od originalne verzije, imala je svoju *inspiraciju* u problemu koji se odnosio na situaciju vezanu za "krađu jabuka". Promjene broja jabuka nastaju kad se lopov susreće s tri čovjeka koji mu prvo "milom ili silom" uzimaju polovinu jabuka, a onda mu neke od njih, bez razumljivog razloga, vraćaju (Lowe, 1749., str. 47.).

Jacksonu se nije svidjela "krađa jabuka" pa zagonetku *smješta* u prihvatljiviju situaciju u kojoj tri smanjenja broja jabuka nastaju prodajom i kupnjom. Zadržava cjelobrojna "dobrovoljna vraćanja", ali mijenja krajnji broj jabuka i u drugoj kupovini se ne radi o polovini, već o trećini raspoloživih jabuka.

Tako je nastala Jacksonova sjedeća zagonetka:

Siromašna žena s košarom jabuka i tri dječaka

"Jednu siromašnu ženu koja je nosila košaru jabuka susrela su tri dječaka. Prvi je kupio pola od jabuka koje je imala, a zatim joj je vratio 10 jabuka. Drugi je dječak kupio trećinu preostalih jabuka i vratio joj 2 jabuke. Treći je kupio polovicu onoga što joj je tada preostalo i vratio joj jednu jabuku. Na kraju je žena ustanovila da joj je preostalo 12 jabuka. Koliko je jabuka imala na početku?" (Jackson, 1821., str. 18–19.)

Ponuđeno je Jacksonovo rješenje glasilo:

"Od preostalih 12 (jabuka) oduzmi 1, pa je 11 broj (jabuka) koji je prodala posljednjem dječaku, a to je polovica (broja jabuka) koje je imala, što znači da je prethodno imala 22 (jabuke). Od 22 (jabuke) oduzmi 2 (jabuke), ostatak od 20 (jabuka) je bilo $\frac{2}{3}$ njezine prethodne zalihe, koja je, dakle, bila 30 (jabuka). Od 30 (jabuka) se oduzima 10 (jabuka), a ostatak od 20 (jabuka) je polovica njezine izvorne zalihe. Shodno tome imala je isprva 40 jabuka. (Jakson, 1821., str. 75–76.)

Da joj treći dječak nije vratio jednu jabuku, žena ne bi imala 12 jabuka, nego bi, kao i dječak, imala tek polovinu, to jest 11 jabuka. Da bi se došlo do broja jabuka prije posljednje kupovine, mora se od krajnjeg broja *oduzeti* vraćena jabuka i dobiveni rezultat udvostručiti: $12 - 1 = 11$ i $11 \cdot 2 = 22$.

Druga promjena je složenija jer dječak ne kupuje polovinu, nego trećinu raspoloživih jabuka. Da joj dječak nije vratio dvije jabuke, žena bi ostala s $\frac{2}{3}$ prethodnog broja jabuka. Da bi se uspostavila ta relacija, moraju se od 22 jabuke oduzeti dvije vraćene jabuke. Tih 20 jabuka su dvije trećine broja jabuka prije druge kupovine. Taj se broj jabuka dobije ako se 20 pomnoži s tri i rezultat podijeli s dva: $20 \cdot 3 = 60$ i $60 : 2 = 30$.

Početni broj jabuka dobije se tako da se od broja jabuka prije druge kupovine oduzme 10 vraćenih jabuka i rezultat se udvostruči: $30 - 10 = 20$ i $20 \cdot 2 = 40$.

Jedina originalna Jacksonova zagonetka

Google pretraživanje pokazuje da je jedina originalna Jacksonova zagonetka koja nije nastala na osnovi nekog ranije objavljenog problema na engleskom jeziku sljedeća:

Gospodin i tri siromašne osobe

"Jedan gospodin je prvoj od tri siromašne osobe koje je sreo, dao polovicu broja šilinga koje je imao kod sebe i još jedan šiling. Drugoj (osobi je dao) polovicu preostalog (broja šilinga) i još dva šilinga, a trećoj (osobi) polovicu onoga što mu je ostalo i još tri šilinga. Nakon toga je otkrio da mu je ostao samo 1 šiling. Koliko šilinga je imao u početku?" (Jackson, 1821., str. 17.)

Lako će se uočiti da je to varijacija Fibonaccijeva problema s jabukama u novom kontekstu. Umjesto jabuka daju se šilinzi i umjesto sedam odvijaju se samo tri polovinska davanja. Najznačajnija strukturalna promjena je što se dodatna cjelobrojna davanja povećavaju za jedan.

Jacksonovo, donekle netransparetno, rješenje je bilo:

"Očito je da je prije davanja posljednjoj osobi imao 8 šilinga, a tih 8 šilinga je bilo 4 šilinga manje od onoga što je dao drugoj osobi. Dao joj je, dakle, 12 šilinga pa je, shodno tome, prije imao 20 šilinga, a ovo je bilo za 2 šilinga manje od onoga što je dao prvoj osobi. Dakle, prvoj osobi je dao 22 šilinga. Na taj način je $20 + 22 = 42$ broj šilinga koje je imao na početku." (Jackson, 1821., str. 74.).

Eksplicitnije "obrtanje predloženog redoslijeda" bi bilo: Prethodni broj šilinga dobiva se kada se naknadnom broju šilinga doda cjelobrojni dio promjene i dobiveni se rezultat udvostruči. Dakle, prethodni se broj prije trećeg davanja dobije tako što se naknadnom broju (1 šiling) doda cjelobrojna promjena (3 šilinga) i rezultat (4 šilinga) se pomnoži s dva. Tako se dobije 8 šilinga. Istim postupkom dobije se broj šilinga prije drugog davanja: $2 \cdot (8$ šilinga $+ 2$ šilinga$) = 20$ šilinga. Početni broj šilinga je: $2 \cdot (20$ šilinga $+ 1$ šiling$) = 42$ šilinga.

Zaključak

Iz današnje perspektive Fibonaccijev pristup formulacijama zagonetki s promjenama je zaista impresivan, kako zbog broja i matematičkog karaktera promjena, tako i zbog značajne činjenice da je razmatrao dva načina njihovih rješavanja, aritmetički i algebarski. U dolazećim se stoljećima broj promjena u sličnim problemima smanjivao i mnogi udžbenici "trgovačke matematike" koriste samo postupak "obrtanja predloženog redoslijeda", izostavljajući nažalost postupak algebarskog rješavanja. Taj trend nastavljaju i "rekreativna matematika" (Hutton, 1803.), kao i ovdje predstavljene Jacksonove zagonetke.

U udžbenicima algebre trend je pak bio suprotan pa se problemi s višestrukim promjenama rješavaju "poštovanjem predloženog redoslijeda", to jest "rješavanjem unaprijed" gdje se traženom početnom broju pridružuje standardni simbol "x". Tu se potpuno izostavlja ili se vrlo rijetko spominje mogućnost aritmetičkog "rješavanja unatrag".

Za dobrobit učenika preporučljivo je "vraćanje Fibonacciju", tj. promoviranje korištenja obaju postupaka rješavanja. To će smanjivati vjerojatnost formiranja pogrešnog vjerovanja učenika da *za sve matematičke probleme* postoji samo jedan jedini način rješavanja. Zbog toga je vrlo važno poticati učenike da u pažljivo odabranim problemima budu kreativni i traže barem dva različita puta k rješenju te da uspoređuju njihove dobre i, eventualno, loše strane.

Takav pristup koji promovira važnost različitih načina rješavanja matematičkih problema, moguće je ilustrirati zagonetkom "Košarica šljiva i tri kćeri" koju je objavila prof. Sanja Varošanec u svom metodičkom članku "Metoda rješavanja unatrag" (Varošanec, 2014.):

"Majka je prije odlaska na posao pripremila za svoje tri kćeri košaricu šljiva. Prva se probudila najstarija kći koja je iz košarice pojela trećinu šljiva. Druga se probudila kći koja je srednja po godinama i, računajući da se probudila prva, pojela trećinu šljiva iz košarice. Zadnja se probudila najmlađa kći i, računajući da se probudila prva, uzela je iz košarice trećinu šljiva. Tada je u košarici preostalo 8 šljiva. Koliko je šljiva majka ostavila u košarici?"

Traženi postupak "rješavanjem unatrag" bi bio:

Najmlađa kći uzela je trećinu postojećih šljiva pa 8 šljiva predstavlja dvije trećine šljiva koje su joj bile na raspolaganju. Taj broj šljiva dobije se ako se 8 pomnoži s 3 i rezultat podijeli s 2: $3 \cdot 8 = 24$ i $24 : 2 = 12$. Istim postupkom dobije se broj šljiva koji je bio na raspolaganju srednjoj kćeri: $3 \cdot 12 = 36$ i $36 : 2 = 18$. Broj šljiva koje je majka ostavila u košari (i koje je najstarija kći imala na raspolaganju) dobije se na isti način: $3 \cdot 18 = 54$ i $54 : 2 = 27$.

Poželjan komplementarni algebarski postupak "rješavanjem unaprijed" bi mogao biti:

Ako je početni broj šljiva x, broj šljiva koje uzima najstarija kći je $\frac{x}{3}$ pa je broj preostalih šljiva $\frac{2x}{3}$. Od tog broja srednja kći uzima trećinu, to jest $\frac{2x}{9}$ i broj preostalih šljiva se dobije iz:

$$\frac{2x}{3} - \frac{2x}{9} = \frac{6x - 2x}{9} = \frac{4x}{9}.$$

Broj šljiva koje uzima najmlađa kći je trećina tog broja, to jest $\frac{4x}{27}$. Broj šljiva koje na kraju ostaju u košari je:

$$\frac{4x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{12x - 4x}{27} = \frac{8x}{27}.$$

Kako je taj broj 8, za početni broj šljiva x dobiva se jednadžba:

$$\frac{8x}{27} = 8.$$

Kao i ranije, početni broj šljiva je 27.

Za kraj je prigodno parafrazirati ono što je rekao dobitnik Nobelove nagrade za fiziku Richard Feynman: Znamo mnogo više ako *jedan te isti problem* riješimo na *dva različita načina* nego ako *dva različita problema* riješimo na *jedan te isti način*.

LITERATURA

1/ K. Devlin (2011.): *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*, Bloomsbury, London.

2/ C. Hutton (1803.): *Recreations in Mathematics and Natural Philosophy*, Kearsley, London.

3/ J. Jackson (1821.): *Rational amusement for winter evenings (or A collection of above 200 curious and interesting puzzles relating to arithmetic, geometry, geography... with their solutions, and four plates. Designed chiefly for young persons)*, Longman, Hurst, Rees, and Brown, London.

4/ S. Lowe (1749.): *Arithmetic in Two Parts*, Part Two, James Hodges, London.

5/ A. S. Posamentier i I. Lehmann (2007.): *The (Fabolous) Fibonacci Numbers*, Prometheus Books, Amherst.

6/ L. E. Sigler (2002.): *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer–Verlag, New York.

7/ S. Varošanec (2014.): Metoda rješavanja unatrag, *Matematika i škola, 77*, str. 52–54.

8/ D. Wells (1992.): *The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzles*, Penguin Books, London.