

Broj e

s učenicima međunarodne mature



Aljoša Brlogar, Kranj

Učenici programa međunarodne mature (IB) susreću se s eksponencijalnom funkcijom kao samostalnim sadržajem dva puta u svom srednjoškolskom školovanju: u drugoj godini općeg gimnazijskog obrazovanja i u prvoj godini IB programa. Eulerov broj obrađivali smo kroz različita poglavlja nastavnog plana i programa.

Uvod

Eulerov broj otkrio je Jacob Bernoulli u 17. stoljeću pri istraživanju kamatnog računa. Kao uvodni primjer, računali smo vrijednosti dobivene od jed-

nog eura nakon jedne godine primjene kamatnog računa s različitim kamatnim stopama i različitim razdobljima kapitalizacije (tablica 1).

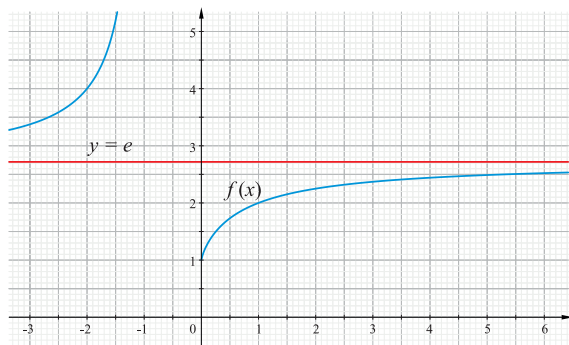
Kapitalizacija	Broj pripisa kamata	Kamatna stopa	Vrijednost nakon jedne godine
godišnja	1	100 %	2 €
polugodišnja	2	$\frac{1}{2} \cdot 100 \% = 50 \%$	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 \text{ €}$
mjesečna	12	$\frac{1}{12} \cdot 100 \% = 8.33 \%$	$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613 \text{ €}$
dnevna	365	$\frac{1}{365} \cdot 100 \% = 0.274 \%$	$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.715 \text{ €}$
satna	8760	$\frac{1}{8760} \cdot 100 \% = 0.11416 \%$	$\left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2.718 \text{ €}$

Tablica 1. Usporedba vrijednosti jednog eura nakon jedne godine kamata na kamatu

mag. Aljoša Brlogar, Gimnazija Kranj, Slovenija, aljosa.brlogar@gimkr.si

Definicija

Iz tog primjera učenici su brzo shvatili da se vrijednost uloženog jednog eura približava nekoj konstanti s povećanjem broja pripisa kamata pri odgovarajućoj kamatnoj stopi. Kao i Bernoulli, i mi smo postavili sljedeće pitanje: *Što bi se dogodilo da je broj pripisa kamata beskonačan?* Odgovor smo pronašli grafički i uz pomoć GeoGebre nacrtali smo graf funkcije $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (slika 1).



Slika 1. Graf funkcije $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ i pravac $y = e$

Da bi učenici razumjeli definiciju koja je uslijedila, promatrali smo samo pozitivan dio apscisne osi. Učenici su već poznavali pojmove asimptote i limesa pa smo u istom koordinatnom sustavu nacrtali i pravac s jednačinom $y = e$. S ranije stečenim znanjima o svojstvima funkcija, brzo su uočili da je funkcija u prvom kvadrantu odozgo omeđena s e .

Definicija 1. Eulerov broj e je limes funkcije $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ kada x teži u beskonačnost.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Osim gore navedene definicije učenici su istražili i neke druge zapise Eulerova broja. Primjerice, odabrali su definiciju s beskonačnim verižnim razlomkom koju je odredio sam Euler:

Definicija 2.

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}$$

ili

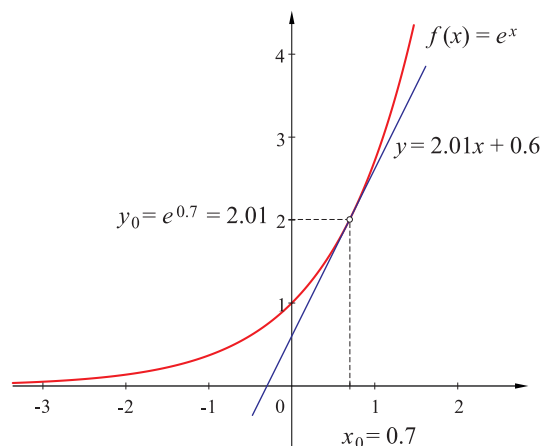
$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \dots, 2n, 1, 1, \dots].$$

Prisjetivši se svojstava decimalnog zapisa racionalnih i iracionalnih brojeva, učenici su sami potvrdili dobro poznatu činjenicu da je broj e iracionalan jer je zapis s verižnim razlomkom beskonačan i neperiodičan.

Eksponecijalna funkcija i Taylorov red

Derivacija i površina

Prije nastavka ponovili smo derivaciju i neodređeni integral eksponencijalne funkcije $f(x) = e^x$: $f'(x) = e^x$ i $\int e^x dx = e^x + C$, gdje je C neka konstanta.

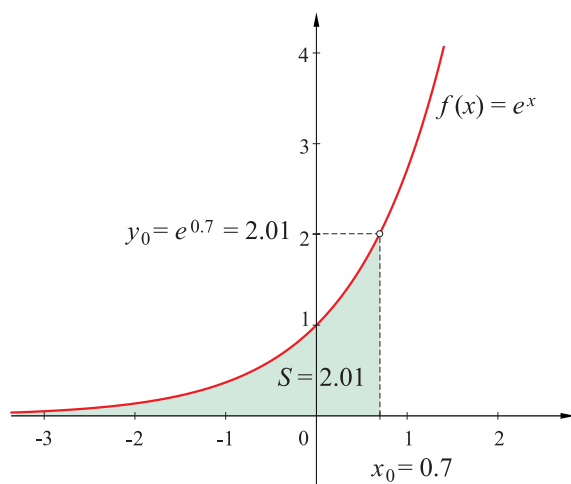


Slika 2. Usporedba vrijednosti funkcije $f(x) = e^x$ s koeficijentom smjera tangente

Oba svojstva promatrali smo na grafovima koje smo nacrtali uz pomoć GeoGebre. Podsjetio sam učenike na geometrijsko značenje derivacije funkcije u nekoj točki. Na prvom grafu (slika 2) uspoređivali smo vrijednost funkcije $f(x) = e^x$ u nekoj točki s koeficijentom smjera tangente u toj istoj točki. Za primjer smo uzeli $x_0 = 0.7$ te uvidjeli da su vrijednost funkcije i nagib tangente jednaki. Sve zajedno smo generalizirali u prvo poznato svojstvo.

Svojstvo 1. Koeficijent smjera tangente na graf eksponencijalne funkcije $f(x) = e^x$ u nekoj točki jednak je vrijednosti funkcije f u toj točki.

Zadao sam učenicima da sami pronađu vezu s integralom. Vrlo brzo su se sjetili da smo uz pomoć integrala računali površinu lika između grafa funkcije i osi apscise. Jedini problem bio je odabir intervala za integriranje.



Slika 3. Usporedba vrijednosti funkcije $f(x) = e^x$ s površinom lika između grafa funkcije i apscise osi

S pomoću svojih grafičkih računala učenici su izračunali površinu lika između grafa funkcije i osi apscise, pri čemu su za gornju granicu uzeli $b = 0.7$, a za donju granicu $a = -1000$. Uslijedio je zaključak da je površina jednaka vrijednosti funkcije f u $x_0 = 0.7$. Zanimalo nas je kako bismo to svojstvo mogli dokazati za svaki x .

Neodređeni integrali uvršteni su u izborna znanja programa međunarodne mature pa smo iz

udžbenika samo prepisali formulu

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Prije samog izvoda ponovili smo: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Zapisali smo izraz za površinu ranije navedenog lika na intervalu $(-\infty, x_0]$, što su učenici uspješno završili sami:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{x_0} e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{x_0} e^x dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^x \Big|_t^{x_0} = e^{x_0} - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = e^{x_0}. \end{aligned}$$

Sve zajedno smo saželi u drugo traženo svojstvo.

Svojstvo 2. Vrijednost eksponencijalne funkcije $f(x) = e^x$ je za proizvoljno odabrani x_0 jednaka površini lika između grafa funkcije i apscise osi na intervalu $(-\infty, x_0]$.

Taylorov red

Kod traženja definicije Eulerova broja učenici su također našli Taylorov red za funkciju $f(x) = e^x$ koja je također dio izbornog sadržaja nastavnog plana i programa. Budući da smo već obrađivali beskonačne redove i "sigma zapis", isti smo sad malo detaljnije pogledali.

Definicija 3. Funkciju s Taylorovim redom zapisujemo kao

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

za proizvoljan realan broj x . Za početak, pogledali smo primjer kada je $x = 1$. Tako smo dobili još jedan od mnogih zapisa Eulerova broja:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

U nastavku smo povezali Taylorov red za funkciju $f(x) = e^x$ s njezinom derivacijom i njezinim neodređenim integralom. Tako smo se na još jedan način uvjerali u oba prethodno navedena svojstva.

Red smo najprije zapisali u raščlanjenom obliku:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Sjetili smo se sada svojstva izraza s faktorijelima:

$$(n+1)! \cdot n! = (n+1)!$$

Postupak deriviranja učenici su većinom napravili sami, i tako se uvjerali da vrijedi svojstvo 1:

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)' \\ &= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x.\end{aligned}$$

Samo integriranje nije im uzrokovalo probleme:

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= \int \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 3!} + \dots + C \\ &= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + C.\end{aligned}$$

Uslijedilo je pitanje: *Kolika je vrijednost konstante C?*

Najbolji odgovor bio je otprilike sljedeći: *Ako broj C zapišemo kao 1 + D, onda je zadnji dobiveni izraz jednak*

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + 1 + D = e^x + D.$$

S tom smo se tvrdnjom svi složili i tako smo izveli i svojstvo 2.

Primjeri dvaju limesa

Kod obrade limesa susreli smo se s limesom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Iz grafa sa slike 1 moguće je zaključiti da je njegova vrijednost jednaka e , što učenicima računski nije bilo baš očito.

Za bolje razumijevanje najprije smo izračunali vrijednost limesa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

U prvom smo koraku uz upotrebu binomnog teorema zapisali:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^k.$$

Uzeli smo u obzir i svojstva računanja limesa i definiciju binomnog simbola u skraćenom obliku:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Limes smo zato zapisali kao:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{x^k}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

Za posljednji zaključak bilo nam je potrebno:

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-k+1}{n}.\end{aligned}$$

Iz svega zajedno uslijedilo je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Za izračun limesa spomenutog na početku, postupak je bio sljedeći:

- uzeli smo da je $x = 1$
- uzeli smo u obzir znanje potencija
- uzeli smo u obzir neprekidnost funkcije potenciranja
- uzeli smo u obzir svojstvo limesa neprekidne funkcije:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \\ &= (e^{-1})^{-1} = e.\end{aligned}$$

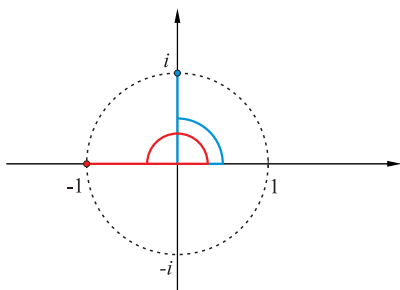
Eulerova formula

Za kraj smo se sjetili još Eulerove formule koju smo obrađivali kod kompleksnih brojeva.

Definicija 4. Proizvoljan kompleksni broj z možemo zapisati kao $z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$, odnosno $z = re^{i\varphi}$ gdje je r udaljenost broja z od ishodišta, a φ njegov argument.

Znamo da je argument broja -1 jednak π . Očito je $r = 1$ i odatle slijedi Eulerova jednačba koja povezuje 5 posebnih brojeva, točnije dva cijela, dva iracionalna i jedan imaginarni broj:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$



Slika 4. Brojevi -1 i i prikazani u kompleksnoj ravni

Uz pomoć Eulerove formule na kraju smo još izračunali vrijednost potencije i^i . Budući da je argument broja i jednak $\frac{\pi}{2}$ i $r = 1$, zapisali smo ga kao $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Upotrebom pravila potenciranja izračunali smo:

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.20788.$$

Rezultat je realan broj, što je za učenike bilo iznenađujuće.

Zaključak

Predstavljena tema nije bila obrađena u okviru samostalnog nastavnog sata jer je sve zajedno nastalo vrlo spontano.

S većinom izvoda i izračuna učenici su se susreli kod obrade različitih poglavlja nastavnog plana i programa. Bez obzira na to, učenici su bez poteškoća uspjeli povezati pojedine dijelove u cjelinu. Za određene izračune smo – zbog ponavljanja već obrađenog sadržaja – potrošili više vremena nego da smo cjelovitu temu obrađivali u jednom dijelu. Razlog za računanje obaju limesa bio je takozvani *Internal assessment*, što je svojevrsna seminarska zadaća kao dio ocjene na programu međunarodne mature. Eulerova jednačba bila je logičan završetak poglavlja kompleksnih brojeva.

LITERATURA

- 1/ P. Fannon, V. Kadelburg, B. Wooley i S. Ward (2012.): *Mathematics Higher Level for the IB Diploma*, Cambridge University Press.
- 2/ D. Felda, M. Bon Klanjšček (2011.): *Matematika 4*, DZS.

