O jednom sustavu jednadžbi

Mea Bombardelli, Diana Ilišević, Željka Milin Šipuš Zagreb

Analizirajući uspjeh kandidata na testu provjere znanja u sklopu razredbenog postupka na Matematičkom odjelu PMF-a u srpnju 2004. godine (vidi [1]), pokazalo se da se jedan od zadataka naročito istaknuo svojom težinom:

Zadatak 11. Broj uređenih parova realnih brojeva (x,y) koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x^{3x^2-3x-6} & = & 1 \\ xy & = & 4 \end{cases}$$

jednak je

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4 **E.** 5

Naglasimo kako se u zadatku traži *broj svih uređenih parova realnih brojeva koji zadovoljavaju obje jednadžbe*, ili drugim riječima, *broj rješenja sustava*.

Najprije riješimo prvu jednadžbu sustava. Ona je oblika $f(x)^{g(x)} = 1\ (x \in \mathbf{R})$. Jednadžbe ovog tipa rješavaju se razlikovanjem sljedećih triju slučajeva:

- $g(x) = 0$, $f(x)$ je bilo koji realan broj;
- $f(x) = 1$, $g(x)$ je bilo koji realan broj;
- $f(x) = -1$, $g(x)$ je paran cijeli broj.

Rješenja kvadratne jednadžbe $3x^2-3x-6 = 0$ su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$.

Nadalje, $x_3 = 1$ je također rješenje prve jednadžbe sustava.

Uočimo da se $x = -1$ već pojavio kao rješenje kvadratne jednadžbe iz eksponenta, a uklapa se i u treći od navedenih slučajeva.

Druga jednadžba sustava povlači $y = \frac{4}{x}$, pa je $y_1 = -4$, $y_2 = 2$ i $y_3 = 4$. Prema tome, rješenja zadanog sustava su uređeni parovi $(-1,-4)$, $(2,2)$, $(1,4)$. Sustav ima 3 rješenja.

Ispravan odgovor je, dakle, A. Označavanje ispravnog odgovora kandidatu je donijelo 20 bodova, označavanje neispravnog odgovora -5 bodova, a neoznačavanje odgovora 0 bodova. Test provjere znanja sastoji se od 33 zadatka, te je na njemu moguće postići najviše 660 bodova.

Prosječan broj ostvarenih bodova na ovom zadatku bio je negativan (-0.85). Na njegovo rješavanje odlučilo se 339 od 494 kandidata. U tablici vidimo broj i udio kandidata, kao i

odgovor	A	B	C	D	E	ukupno
broj kandidata	51	32	232	17	7	339
postotak	15.04%	9.44%	68.44%	5.01%	2.06%	100%
prosjek bodova	299.41	231.09	233.60	151.76	117.86	236.77

[1] Brojevi (statistički podaci) u tom članku ponešto se razlikuju od ovdje objavljenih, zbog ponovne, detaljnije obrade za potrebe ove analize.

prosječan ukupan broj bodova kandidata koji su se odlučili za pojedine odgovore:

Za ispravan odgovor A odlučio se svega 51 kandidat.

Najviše kandidata (njih 232, preko dvije trećine) odlučilo se za pogrešan odgovor C, smatrajući da sustav ima dva rješenja. Nekima od njih je vjerojatno promaklo da je i $x = 1$ rješenje prve jednadžbe, dok su neki kandidati možda i svjesno odbacili $x = 1$ jer je u tom slučaju eksponent $3x^2 - 3x - 6 = -6$ negativan broj. Međutim, $1^{-6} = 1$.

Moguće je i da su neki kandidati uzeli u obzir rješenje $x = 1$, ali su zato rješavanjem kvadratne jednadžbe iz eksponenta dobili $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ te su negativno rješenje odbacili. Istina je da eksponencijalnu funkciju definiramo za pozitivnu bazu, no za $x = -1$ ovdje dobivamo izraz $(-1)^0$, koji je dobro definiran i ima vrijednost 1.

Vjerujemo da su kandidati koji su zaokružili odgovor B (*sustav ima jedno rješenje*) pretežno odbacili rješenje $x = -1$, a $x = 1$ ili zaboravili ili odbacili, pa im je preostalo jedino $x = 2$.

Odgovori D i E su manje očekivani i manje zastupljeni.

Također možemo uočiti da su, očekivano, kandidati koji su odabrali odgovor A postigli (u prosjeku) najveći ukupan broj bodova, gotovo 300. Slijede oni koji su zaokružili B ili C, s nešto više od 230 bodova, dok kandidati koji su zaokružili odgovor D imaju oko 150 bodova, a oni koji su odabrali odgovor E niti 120 bodova.

Promotrimo još nekoliko sličnih zadataka:

Primjer 1. Odredite broj uređenih parova realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x^{-3x^2+9x-6} = 1 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $-3x^2+9x-6 = 0$ su $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. U ovoj je jednadžbi već dobiveno rješenje $x = 1$. Ispitajmo može li baza biti $x = -1$. Tada je eksponent jednak -18, dakle, paran cijeli broj. Prema tome, u ovom slučaju također imamo tri rješenja. To su uređeni parovi $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(-1, -4)$.

Moguća je i sljedeća situacija:

Primjer 2. Odredite broj uređenih parova realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x^{x^2-5x+6} = 1 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 5x + 6 = 0$ su $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Rješenje prve jednadžbe sustava je i $x_3 = 1$. Ispitajmo još mogućnost da je baza $x = -1$. Tada je eksponent jednak 12, a to je paran broj. Dakle, u ovom slučaju imamo četiri rješenja. To su uređeni parovi $(2, 2)$, $(3, \frac{4}{3})$, $(1, 4)$, $(-1, -4)$.

Sljedeći primjer pokazuje važnost analize za potencijalno rješenje $x = -1$:

Primjer 3. Odredite broj uređenih parova realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x^{-x^2+2x+8} = 1 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Za $x = -1$ eksponent postaje 5, pa $x = -1$ nije rješenje sustava. Stoga sva rješenja dobivamo rješavajući kvadratnu jednadžbu u eksponentu ($x_1 = 4$, $x_2 = -2$) i izjednačujući bazu s 1 ($x_3 = 1$). Dakle, rješenja su uređeni parovi $(4, 1)$, $(-2, -2)$, $(1, 4)$.

Cjelovit test provjere znanja s prvog upisnog roka 2004. godine može se pronaći u [2].

Literatura

[1] M. Bombardelli, D. Ilišević, Ž. Milin Šipuš, *Osvrt na razredbeni postupak na PMF-MO*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike–mentore 14 (2005), str. 18-26.

[2] *Zadaci s prijemnog ispita na Matematičkom odjelu i Fizičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu*, MFL 1/217 (2004/05, LV), str. 60–63.