

Modeliranje linearnom funkcijom: multivitamin, taksi i brzina

Vesna Županović, Kristina Šorić, Lahorija Bistričić i Petra Vidović, Zagreb

U članku donosimo tri primjera motivirana priručnikom [5], koji su autorice ovog članka objavile 2016. unutar projekta STEM genijalci. Neki od primjera iz [5] našli su se i u scenariju i modulu [1] projekta MERIA, u kojem se govori o modeliranju linearnom funkcijom u kontekstu tvornice bicikala.

O MERIA projektu i istraživački orijentiranoj nastavi matematike bilo je riječi u članku [3], u kojem je dan primjer scenarija. MERIA projekt ima svoj nastavak, projekt *TIME – Teachers' Inquiry on Mathematics Education*, koji je upravo započeo u suradnji s partnerima iz Nizozemske, Danske, Slovenije i Hrvatske. U projektu TIME planirana je edukacija nastavnika za samostalno kreiranje scenarija koje bi onda primjenjivali u svojim učionicama.

U nastavku članka tri su problema koji se mogu razviti u scenarije jer posjeduju otvorenost i istraživački potencijal u skladu s teorijom *Realističnog matematičkog obrazovanja (Realistic mathematics education, RME)* spomenutom u [3]. Jedno od glavnih dvaju načela RME kaže da je smisljena matematika izgrađena na bogatim realnim kontekstima. Pokušali smo dati tri takva realna konteksta prikladna za grupni rad učenika. Problem s multivitaminom već je postavljen istraživački, tj. nestrukturirano. Usporedbu strukturirane i nestrukturirane verzije zadatka možete vidjeti u priručniku [4] na stranici 18. Ostala dva problema, problem s taksijem i problem s brzinom dana su u dvije verzije – struk-

turiranoj i nestrukturiranoj koja obuhvaća dio strukturirane verzije zadatka. Problemi koje obrađujemo povezani su s ekonomijom i fizikom. Rješavani su korištenjem računalnog programa Wolfram Alpha i Wolfram Mathematica. Wolfram Alpha javno je dostupna, jednostavnija verzija Wolframove Mathematice koju ovdje upotrebljavamo za jednostavne prikaze. Ovim člankom želimo u našim školama potaknuti istraživačku nastavu matematike, korištenje računala te interdisciplinarnost.

Primjer 1: Multivitamin

Sportaš treba dnevno uzeti najmanje **74** mg vitamina B i **123** mg vitamina C. Gram multivitamina Multi sadrži **20** mg vitamina B i **9** mg vitamina C, a gram multivitamina Nature sadrži **4** mg vitamina B i **11** mg vitamina C.

Kutija multivitamina Multi sadrži **100** tableta od po **1** gram, a cijena kutije je **90** kn. Kutija Nature sadrži **10** tableta od po **10** grama, a cijena kutije je **110** kn.

prof. dr. sc. Vesna Županović, Zavod za primijenjenu matematiku, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, vesna.zupanovic@fer.hr

dr. sc. Kristina Šorić, profesor visoke škole, Rochester Institute of Technology Croatia, kristina.soric@croatia.rit.edu
prof. dr. sc. Lahorija Bistričić, Zavod za primijenjenu fiziku, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, lahorija.bistricic@fer.hr

Petra Vidović, mag. ing. inf. et comm. techn., bacc. praesc. educ., Dječji vrtić Mali princ, Zagreb, pvidovic@gmx.com

	A	B	C
1		Vitamin B	Vitamin C
2	Multi	20 mg	9 mg
3	Nature	4 mg	11 mg

Slika 1. Količina vitamina u gramu multivitamina

U uputi piše da nema opasnosti za zdravlje ako se uzme previše vitamina B i C.

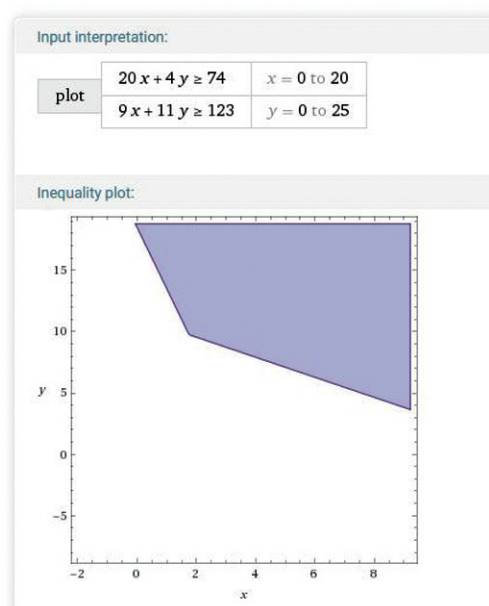
Savjetujte sportašu kako da uzima multivitamine. Napišite mu preporuku!

Rješenje:

1. Neka je x količina multivitamina Multi u gramima, a y količina Nature u gramima.

Onda je

$$\begin{aligned} 20x + 4y &\geq 74 \\ 9x + 11y &\geq 123 \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$



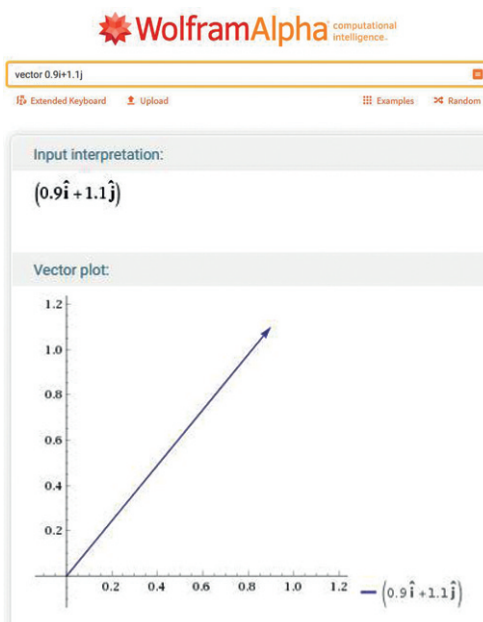
Slika 2. Presjek poluravnina

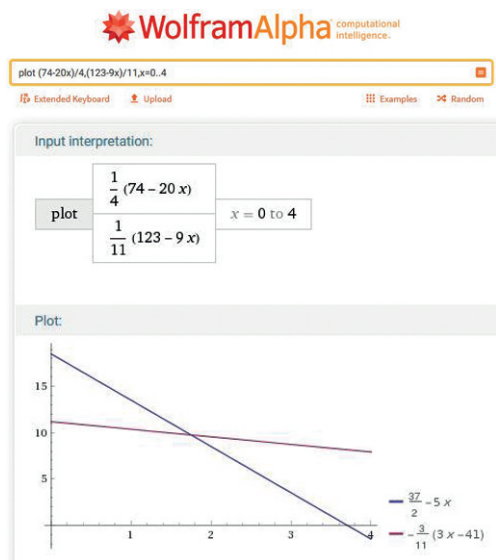
Crtao presjek dviju poluravnina. Svaka točka (x, y) iz tog presjeka određuje dovoljne količine Multi i Nature.

2. Sljedeći korak bi bio odrediti koja je najpovoljnija varijanta gledajući cijenu te vidjeti kako je to moguće realizirati uzimajući cijeli broj tableta te ako je moguće raspolavljajući tablete. Promatramo funkciju

$$z(x, y) = 0.9x + 1.1y$$

koja nam kazuje koliko treba ukupno platiti ako uzmemo x grama Multi i y grama Nature. Tražimo minimum funkcije z na području sa slike 2. Od učenika se očekuje da uspiju zaključiti da se minimum funkcije z nalazi na rubu osjenčanog područja. Minimum može biti u vrhu ili na stranici. Učenici mogu koristiti uvrštavanje točaka ili logiku da su povoljni x, y ipak najmanji na rubu područja, pa je i cijena najmanja. Učenici mogu doći do različitih argumenata, što daje zanimljivost. U ovom slučaju se minimum funkcije z poprima na stranici $9x + 11y = 123$ jer je gradijent funkcije z okomit na tu stranicu. Gradijent funkcije z je $\vec{v} = 0.9\vec{i} + 1.1\vec{j}$ te ga možemo nacrtati kao na slici 3 ili kao $9\vec{i} + 11\vec{j}$, ovisno o tome koje mjerilo nam je prikladnije. Kad

Slika 3. Gradijent funkcije $z(x, y)$



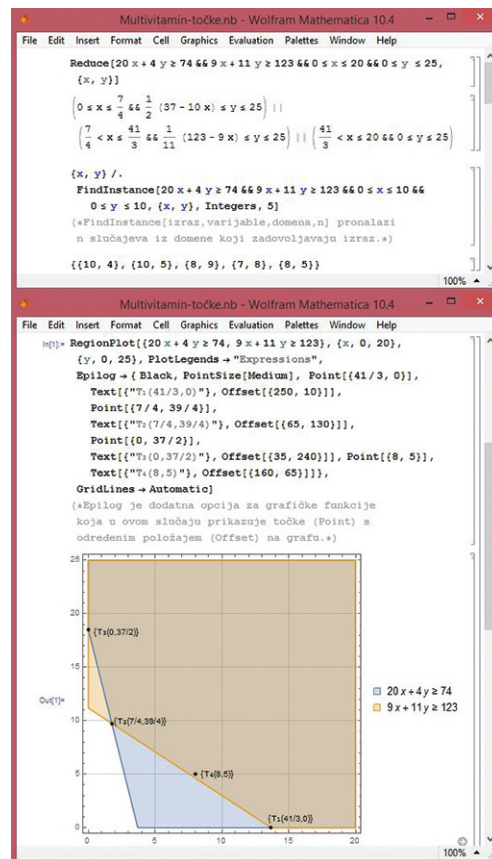
Slika 4. Presjek pravaca

idemo okomito na $\vec{v}$ prema povoljnom području, udarimo u cijelu stranicu.

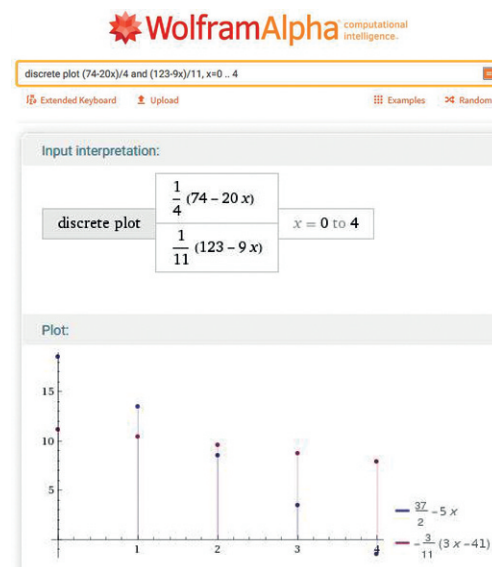
Slika 2 prikazuje presjek poluravnina, a slika 4 presjek pravaca. U internetskom pregledniku Wolfram Alpha prikazuje rješenje kao osjenčano područje. Problem optimalnosti rješavan je s pomoću programa Wolfram Mathematica. Na slici 5 prikazan je presjek ravnina, ali i tri točke T_1, T_2, T_3 koje su vrhovi poligona u kojem leže rješenja. Ispisane su koordinate nekih 5 cjelobrojnih točaka iz poligona. Računalom nije provedena iscrpna pretraga točaka koje su cjelobrojne, a pri tome se nalaze na paraleli unutar poligona koja je najbliža stranici T_1T_2 . Trošak raste kako se paralelno odmičemo od stranice T_1T_2 . Učenik može na milimetarskom papiru uspješno pretražiti cjelobrojne točke. Izdvojili smo točku $T_4(8, 5)$ i uključili je u daljnju analizu troškova jer ta točka daje povoljan broj tableta, što se vidi prema izračunu na slici 8.

3. Zaključili smo da je trošak minimalan i jednak na cijeloj stranici T_1T_2 . Sad još treba vidjeti kakav je način uzimanja vitamina sportašu praktičan. Koji će broj tableta uzimati i hoće li ih rasplavljati?

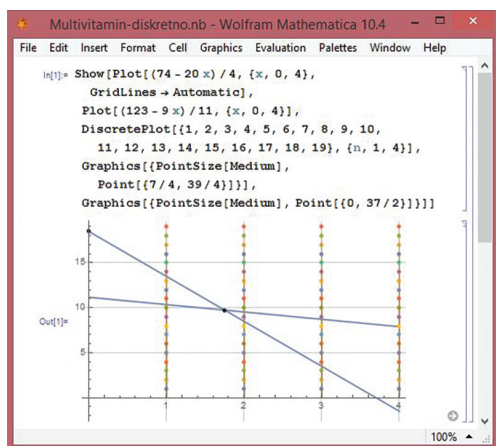
Diskretni prikaz presjeka pravaca je, osim u Wolfram Alphi na slici 6, prikazan i u Wolfram Mathema-



Slika 5. Presjek poluravnina sa sjecištima



Slika 6. Diskretni prikaz



Slika 7. Diskretni prikaz u Mathematici

	A	B	C	D	E	F
1	Točka	Multi tableta	Nature tableta	Unos B vitamina	Unos C vitamina	Cijena/dan
2	$T_1(41/3, 0)$	14	0	$280+0=280$	$126+0=126$	12,60 kn
3	$T_2(7/4, 39/4)$	2	1	$40+40=80$	$18+110=128$	12,80 kn
4	$T_3(0, 37/2)$	0	2	$0+80=80$	$0+220=220$	22,00 kn
5	$T_4(8, 5)$	8	0,5	$160+20=180$	$72+55=127$	12,70 kn

Slika 8. Cijena i količina vitamina

tici na slici 7. U jednom i drugom alatu x -os ide do 4 pa u tom slučaju na grafu nisu prikazane točke $T_1(41/3, 0)$ i $T_4(8, 5)$. Zbog prirode samog zadatka zanimljiva nam je okolina presjeka pravaca.

Na osi x je točka $T_1(41/3, 0)$ iz koje bi slijedilo uzimanje 14 tableta što je vrlo nepraktično. Točka $T_2(7/4, 39/4)$ nam kaže da sportaš treba uzeti 2 grama Multija, što su ujedno 2 tablete jer je 2 najmanji cijeli broj veći od $7/4$. Iz koordinate $39/4$ zaključujemo da treba uzeti 1 tabletu Nature jer su one 10-gramske. Točka $T_3(0, 37/2)$ nam kaže da sportaš treba uzeti 0 grama Multija, a iz koordinate $37/2$ zaključujemo da treba uzeti 2 tablete Nature. Točka $T_4(8, 5)$ nam kaže da sportaš treba uzeti 8 Multi tablete, a iz koordinate 5 zaključujemo da treba uzeti pola tablete Nature.

Preporuča se opcija (2, 1) iako nije najjeftinija, ali je praktičnija zbog uzimanja manje tableta. Učenici mogu preporučiti neku drugu opciju, pri čemu je važno da je argumentiraju. Potaknite diskusiju među učenicima.

Primjer 2: Taksi

Poslovni tjednik LIDER objavio je članak [2] s cijenama taksi-usluga u Zagrebu. Otvorite poveznicu i pročitate članak. Ako imate problema s otvaranjem poveznice, članak možete pročitati i u nastavku.

Kada zatrebate uslugu taksi-prijevoza, u sve većem moru opcija koje se nude u Zagrebu teško se odlučiti koga nazvati. Da vam malo olakšamo odluku, donosimo pregled cijena taksi-prijevoznika.

Radio Taxi Zagreb (1717)

Radio Taxi je najstariji taksi-prijevoznik u Zagrebu te se može pohvaliti i najvećim brojem vozila. Start će vas koštati 10 kuna, a svaki prijeđeni kilometar šest kuna. Čekanje u Radio Taksiju koštaće vas 40 kuna po satu.

Taxi Cammeo (1212)

Start u Cammeu košta 5 kuna, a svaki prijeđeni kilometar 3 kune. Čekanje se, pak, naplaćuje kunu po minuti, a minimalna cijena vožnje iznosi 13 kuna.

EKO Taxi (1414)

U EKO Taksiju taksimetar počinje vožnju na četiri kune. Prijedeći kilometar također će vas koštati četiri kune, pri čemu treba napomenuti da vozači Eko taksija neće prihvatiti vožnju ispod 12 kuna.

Uber

Zahvaljujući Uberu, Hrvati su prije nekoliko godina vožnju taksijem počeli naručivati i aplikacijama na pametnim telefonima. Uberov start je 6 kuna, dok kilometar vožnje košta 3.60 kuna. Uber za razliku od klasičnog taksija naplaćuje i 0.60 kuna po minuti vožnje, a minimalna cijena vožnje ne smije biti ispod 13 kuna. U travnju 2019. godine Uber je uveo i fiksnu cijenu vožnje, za razliku od dotadašnjeg raspona cijena. Ako se Uberom vozite u gužvama ili u vrijeme velike potražnje za taksijima, postoji mogućnost uvećanja cijene vožnje. 'Price surge' se dogodi kada gužve na prometnicama i nedostatak slobodnih vozača u vrijeme velike potražnje za vozilom rezultira dužim vremenom čekanja vožnje, ali i stajanja u prometu. Kako bi se vozaču u ovoj situaciji na-

doknadilo utrošeno gorivo i vrijeme, cijena ponekad naraste.

BOLT (ex Taxify)

Druga najpopularnija aplikacija za naručivanje vožnje je Bolt. Start Boltova taksija iznosi 6 kuna, a vožnju naplaćuju 60 lipa po minuti uz 3.60 kuna po kilometru. Kao u slučaju Ubera, 'price surge' prisutan je i kod Boltovih vozila.

RIDE2 Taxi (1616)

RIDE2 je jedna od novijih taksi-kompanija na ulicama grada Zagreba. Nude standardnu uslugu automobilom i kombijem, ali i luksuzniju varijantu prijevoza u Mercedesu. Cijena početka vožnje standardnim taksijem koštat će vas 6 kuna, odnosno 3.60 kuna po prijeđenom kilometru. RIDE2 garantira besplatnih prvih 15 minuta čekanja, odnosno prvih sat vremena ako vožnja počinje na aerodromu.

1. Sistematizirajte informacije iz članka u tablicu koja će imati sedam redaka i pet stupaca. U prvom retku, prva ćelija je prazna, u drugoj ćeliji je tekst "Početna cijena", u trećoj ćeliji "Cijena po kilometru", u četvrtoj ćeliji "Cijena po minuti vožnje", a u petoj "Cijena čekanja". U svakom sljedećem retku, u prvoj je ćeliji naziv taksipoduzeća, a u sljedećim ćelijama vrijednosti koje odgovaraju pojmovima iz prvog retka.
2. Odredite jednadžbe taksi-usluge za Radio Taxi Zagreb i RIDE2 Taxi uz pretpostavku da nema usluge čekanja. Grafički prikazite obje taksiusluge i komentirajte koja je taksi-usluga jeftinija.
3. Koliko se minimalno kilometara morate voziti da bi EKO Taxi prihvatio vožnju?
4. Uz pretpostavku da minimalan broj kilometara zadovoljava uvjet iz prethodnog podzadatka, grafički prikazite taksi-usluge za EKO Taxi i RIDE2 Taxi i komentirajte koja je taksi-usluga jeftinija.
5. Ako vam je plan voziti se 1 km, zaustaviti se 1 minutu i opet voziti 1 km, hoće li Taxi Cammeo prihvatiti vožnju?
6. Odredite jednadžbu taksi-usluge za Uber ako je start 6 kn, kilometar vožnje košta 3.60 kuna, te ako Uber naplaćuje i 0.60 kn po minuti vožnje,

a minimalna cijena vožnje ne smije biti ispod 13 kuna. Pronađite sve kombinacije broja kilometara i broja minuta za koje će Uber prihvatiti vožnju.

7. Odredite jednadžbu taksi-usluge za BOLT uzimajući u obzir dvije varijable, broj prijeđenih kilometara i broj minuta te je grafički prikazite.
8. *Napomena.* Ovaj je dio zadatka nestrukturirana verzija i nadovezuje se direktno na tekst zadatka te se može samostalno zadati. U ovoj se verziji očekuje od učenika da sami kreiraju tablicu u drugom podzadatku, bez uputa koje su tamo dane.

Vaša škola organizira učeničku konferenciju. Pritom koristite usluge agencije School Agency, a sudionike iz drugih gradova smjestit ćete u hostel Star. Jednog vam se dana dogodilo da iz svoje škole najprije morate otići u agenciju odnijeti ugovor na potpisivanje te taj ugovor odmah zatim odnijeti u hostel na daljnje potpisivanje. Na kraju se morate ponovno vratiti u školu. Udaljenost od škole do agencije je 4 km, od škole do hostela 1 km te od agencije do hostela 1 km. U agenciji se ne morate zadržavati, a u hostelu se planirate zadržati 4 minute te ćete zamoliti taksi da vas pričekava. Sve su tri lokacije direktno povezane cestom. Budući da se planirate voziti taksijem, koji ćete taksi koristiti tako da se najjeftinije prevezete? Pretpostavljamo da u agenciju morate doći u 16 h, u vrijeme najvećih gužvi u gradu.

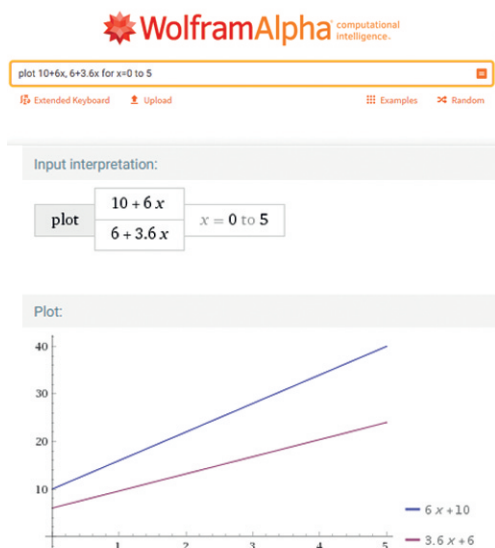
Rješenje:

1.

	A	B	C	D	E
1		Početna cijena	Cijena po kilometru	Cijena po minuti vožnje	Cijena čekanja
2	Radio Taxi Zagreb	10	6		40 kn/h
3	Taxi Cammeo	5	3		1 kn/min
4	EKO Taxi	4	4		
5	Uber	6	3,6	0,6	
6	BOLT	6	3,6	0,6	
7	RIDE2 Taxi	6	3,6		

Slika 9. Cijene taksi-usluga

2. Označimo sa x prijeđene kilometre. Ukupna je cijena jednaka zbroju početne cijene i ukupne cijene



Slika 10. Grafički prikaz u Wolfram Alphi

ne za x prijedjenih kilometara. Tada su jednadžbe taksi-usluge za Radio Taxi Zagreb i RIDE2 Taxi jednake:

$$RTZ(x) = 10 + 6x$$

$$R2T(x) = 6 + 3.6x.$$

Gornji je pravac grafički prikaz funkcije $RTZ(x) = 10 + 6x$, a donji pravac funkcije $R2T(x) = 6 + 3.6x$. Gornji je pravac uvijek iznad donjeg pravca što znači da je cijena RTZ uvijek veća od cijene R2T bez obzira na broj prijedjenih kilometara. Ta se dva pravca nikad neće sjeći jer je koeficijent gornjeg pravca jednak 6, a donjeg 3.6, tj. koeficijent smjera gornjeg pravca je veći od koeficijenta smjera donjeg pa je gornji pravac strmiji. Dakle, uz pretpostavku da nema usluge čekanja, cijena R2T je uvijek manja od cijene RTZ.

3. Cijena vožnje EKO Taxijem dana je jednadžbom $ET(x) = 4 + 4x$. Ta cijena mora biti barem 12 kn. Matematički rješavamo nejednadžbu $4 + 4x \geq 12$. Slijedi da je

$$4 + 4x \geq 12$$

$$4x \geq 12 - 4$$

$$4x \geq 8$$

$$x \geq 2.$$

Dakle, minimalan broj kilometara da bi EKO Taxi prihvatio vožnju je 2.

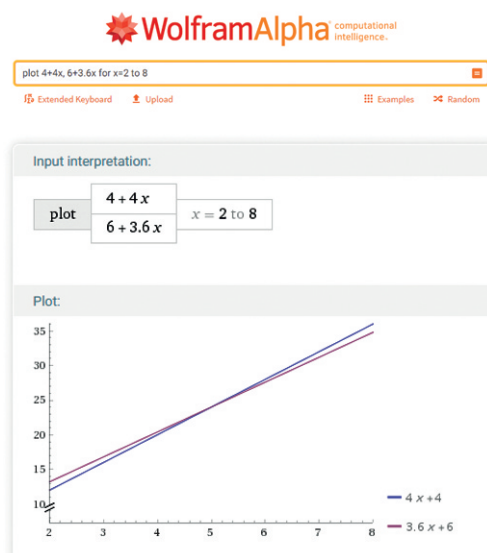


Slika 11. Rješenje u Wolfram Alphi

4.

$$ET(x) = 4 + 4x$$

$$R2T(x) = 6 + 3.6x$$



Slika 12. Presjek pravaca

Možemo uočiti da je za neke vrijednosti x graf funkcije $ET(x) = 4 + 4x$ ispod, a za neke vrijednosti x iznad grafa funkcije $R2T(x) = 6 + 3.6x$. Izračunajmo točku presjeka tih dvaju pravaca. U tu svrhu rješavamo jednadžbu $4 + 4x = 6 + 3.6x$.

Slijedi da je

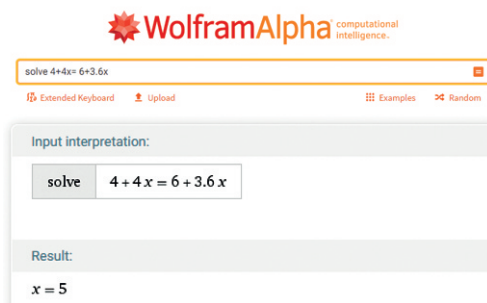
$$4 + 4x = 6 + 3.6x$$

$$4x - 3.6x = 6 - 4$$

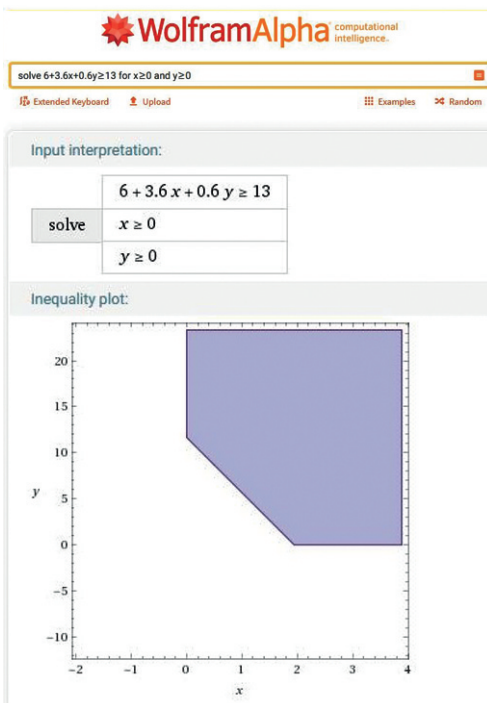
$$0.4x = 2$$

$$x = 5.$$

Zaključujemo da je EKO Taxi jeftiniji ako se vozimo do 5 km, a ako se vozimo više od 5 km, EKO Taxi je skuplji. Ako se vozimo točno 5 km, onda je cijena ista.



Slika 13. Točka presjeka pravaca

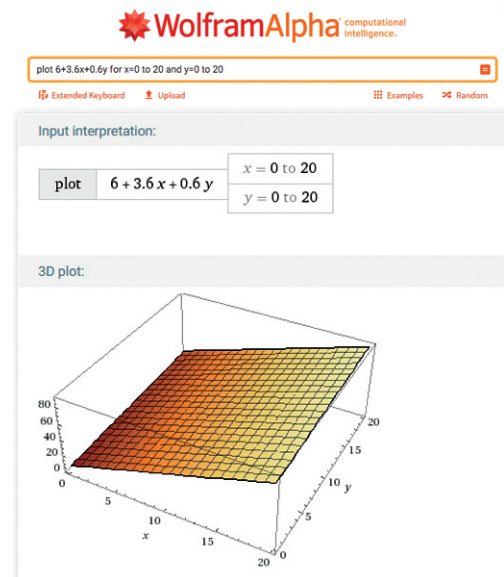


Slika 14. Grafičko rješenje u Wolfram Alphi

5. $TC(x) = 5 + 3x$ je cijena vožnje za Taxi Cammeo za x prijeđenih kilometara bez čekanja. Ako postoji čekanje, cijena se povećava za 1 kn po minuti. U ovom slučaju planiramo prijeći ukupno 2 km i čekati 1 minutu. Ukupna će cijena biti $5 + 3x$ + cijena čekanja = $5 + 3 \cdot 2 + 1 = 12$ kn. Budući da je minimalna cijena vožnje uz koju će Taxi Cammeo prihvatiti istu 13 kn, zaključujemo da u ovom slučaju Taxi Cammeo neće prihvatiti vožnju.

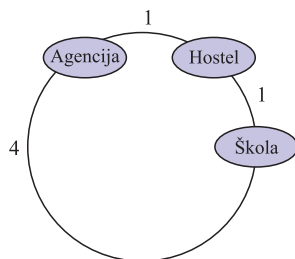
6. Neka je x broj prijeđenih kilometara, a y broj minuta trajanja vožnje. Tada je jednadžba usluge za Uber jednaka $U(x) = 6 + 3.6x + 0.6y$. Minimalna je cijena vožnje 13 kn pa matematički moramo riješiti nejednadžbu $6 + 3.6x + 0.6y \geq 13$.

7. Neka je x broj prijeđenih kilometara, a y broj minuta trajanja vožnje. Tada je jednadžba usluge za BOLT jednaka $B(x) = 6 + 3.6x + 0.6y$.



Slika 15. Graf funkcije dviju varijabli

8. Budući da se trebamo voziti u vrijeme najveće gužve, Uber i BOLT ne dolaze u obzir jer oni naplaćuju vožnju i po minuti, a ne samo po kilometru. Također, vožnju možemo obaviti u nizu Š–A–H–Š (ukupno 6 km), ali i u nizu Š–H–A–H–Š (ukupno 4 km).



Slika 16. Cestovna povezanost

Uzimajući u obzir da Radio Taxi i Taxi Cammeo naplaćuju čekanje, izračun ukupne cijene za te dvije opcije dan je u Excel tablici:

	A	B	C	D	E	F
1		Početna cijena	Cijena po kilometru	Cijena čekanja	Ukupna cijena (4 km)	Ukupna cijena (6 km)
2	Radio Taxi Zagreb	10	6	40 kn/h	36,68	48,68
3	Taxi Cammeo	5	3	1 kn/min	21	27
4	EKO Taxi	4	4		20	28
5	RIDE2 Taxi	6	3,6		20,4	27,6
6						
7	Ukupno km	4				
8	Ukupno km	6				

Slika 17. Izračun najjeftinije opcije

Najjeftinija vožnja je vožnja na relaciji Š–H–A–H–Š (ukupno 4 km) s EKO Taksijem.

Primjer 3: Brzina

Marin, Luka i Frane utrivali su se motociklima na ravnoj stazi dugačkoj 700 m. Nakon zvučnog signala koji je označio početak utrke, Marin je prvih 10 s jednoliko ubrzavao s ubrzanjem 1 m/s^2 , a nakon toga se do kraja utrke gibao postignutom brzinom. Luka se tijekom cijele utrke gibao jednoliko ubrzano s ubrzanjem 0.4 m/s^2 . Frane se prvih 20 s gibao jednoliko ubrzano ubrzanjem 0.7 m/s^2 , sljedećih 20 s nastavio je gibanje postignutom brzinom, a nakon toga je zbog kvara na motoru usporavao s 1 m/s^2 . Iz grafičkog prikaza ovisnosti brzine o vremenu odredite:

1. Nakon koliko su vremena od početka utrke Marin i Luka vozili jednakim brzinama? Jesu li u tom trenutku vozili jedan pokraj drugog?
2. U kojem se trenutku Frane zaustavio? Koliko je tada bio udaljen od početnog položaja?

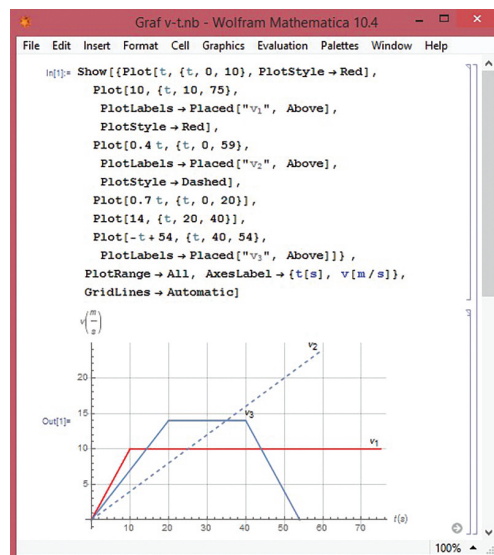
3. Tko je prvi stigao do cilja? Da li bi se rezultat natjecanja promijenio da se Frani nije pokvario motocikl i da se nastavio gibati stalnom brzinom?

4. *Napomena.* Ovaj dio zadatka je nestrukturirana verzija i nadovezuje se direktno na tekst zadatka. S obzirom na to da je takav pristup učenicima teži, ali i zanimljiviji, predlažemo da uzmete samo 2 natjecatelja, odnosno da izostavite Franu jer je njegovo kretanje najkompliciranije. Ovaj se problem može rješavati na satovima matematike i na satovima fizike.

Za časopis Motoklub trebaš napisati članak o tijeku utrke. Čitatelji žele znati tko je poveo u utrci i je li cijelo vrijeme vodio. Od trenera koji su pratili utрку dobio si podatke da su se Marin i Luka (u naprednijoj verziji i Frane) utrivali motociklima na ravnoj stazi dugačkoj 700 m brzinama koje su ranije navedene.

Rješenje:

Preporuča se nacrtati grafički prikaz ovisnosti brzine o vremenu.



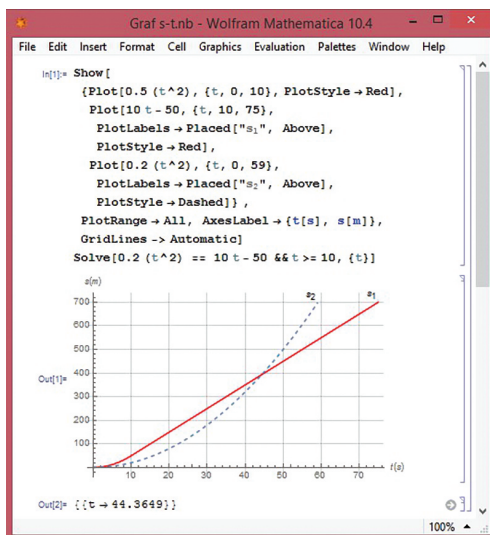
Slika 18. Graf ovisnosti brzine o vremenu

1. Iz grafa se može očitati ili izračunati da će brzine biti jednake nakon 25 s i iznositi 10 m/s. Put koji su motociklisti prošli jednak je površini u $v-t$

dijagramu i može se odrediti iz grafa, kao površina pravokutnog trokuta ili površina pravokutnika. Put koji je prešao Marin: $s_M = 0.5 \cdot v_1 \cdot t_1 + v_1(t_2 - t_1)$, $v_1 = 10 \text{ m/s}$, $t_1 = 10 \text{ s}$, $t_2 = 25 \text{ s}$, $s_M = 200 \text{ m}$. Put koji je prešao Luka: $s_L = 0.5 \cdot v_2 \cdot t_2 = 125 \text{ m}$. U trenutku kada su Marin i Luka vozili jednakim brzinama Marin se nalazio 75 m ispred Luke.

2. Nakon 40 s vožnje Frane je vozio brzinom: $v_3 = a_3 \cdot t_3 = 14 \text{ m/s}$, $a_3 = 0.7 \text{ m/s}^2$, $t_3 = 20 \text{ s}$. Nakon kvara Frane je motocikl počeo jednoliko usporavati s $a_4 = 1 \text{ m/s}^2$ i nakon 14 s se zaustavio, tj. brzina $v = v_3 - a_4 \cdot t = 0$. Frane je do zaustavljanja vozio 54 s. Njegova udaljenost od početnog položaja u trenutku zaustavljanja je ($t_4 = 40 \text{ s}$, $t_5 = 14 \text{ s}$): $s_F = 0.5 \cdot v_3 \cdot t_3 + v_3(t_4 - t_3) + 0.5 \cdot v_3 \cdot t_5 = 518 \text{ m}$.

3. Pobijedio je Luka jer mu je do cilja trebalo 59.16 s, a Marinu 75 s. Frane zbog kvara na motociklu nije stigao do cilja. Rezultat natjecanja ne bi se promijenio da se Frani nije pokvario motocikl jer bi mu u tom slučaju do cilja trebalo 60 s.



Slika 19. Graf ovisnosti puta o vremenu

4. Učenici mogu crtati grafove ovisnosti prijednog puta o vremenu i tražiti presjke grafova ili odmah tražiti presjke bez crtanja. Graf ovisnosti puta o vremenu za Marina sastavljen je od dijela parabole i dijela pravca koji je prikazan crveno na slici, dok je za Luku graf iscrtkana parabola. Pravac i Lukina parabola imaju jedan presjek za $t \geq 10$.

Utrku je poveo Marin, ali nakon 44 sekunde Luka prelazi u vodstvo koje zadržava do kraja utrke i pobjeđuje.

LITERATURA

- 1/ K. Cafuta, urednik (2019.): *MERIA scenariji i moduli*, Projekt MERIA, kolovoz 2019.
<https://meria-project.eu/sites/default/files/2019-09/MERIA%20Scenarios%20and%20Modules%20HRV.pdf>
- 2/ LIDER, Poslovni tjednik; *Cijene taksija u Zagrebu: Provjerite koji prijevoznik je najisplativiji, a koji najskuplji*, LIDER, 30. prosinca 2019.
<https://lider.media/poslovna-scena/hrvatska/cijene-taksija-u-zagrebu-provjerite-koji-prijevoznik-je-najisplativiji-a-koji-najskuplji-26799>
- 3/ Ž. Milin Šipuš, E. Špalj, M. Bašić, S. Antoliš (2019.): Projekt MERIA i istraživački usmjerena nastava matematike, *Matematika i škola 101*, godina 21., listopad 2019., str. 3–12.
- 4/ C. Winslow, urednik (2017.): *Praktični vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike*, Projekt MERIA, kolovoz 2017.
<https://meria-project.eu/sites/default/files/2017-11/MERIA%20Practical%20Guide%20to%20IBMT-HRV.pdf>
- 5/ V. Županović, K. Šorić (2016.): *Primijenjena matematika podržana računalom*, Slavonski Brod: Gimnazija Matija Mesić (priručnik)
<http://www.stem-genijalci.eu/matematika-informatika>