O jednoj algebarskoj jednadžbi četvrtog stupnja

Šefket Arslanagić, Sarajevo (BiH)

U ovom članku bavit ćemo se rješavanjem jedne algebarske jednadžbe četvrtog stupnja koja glasi:

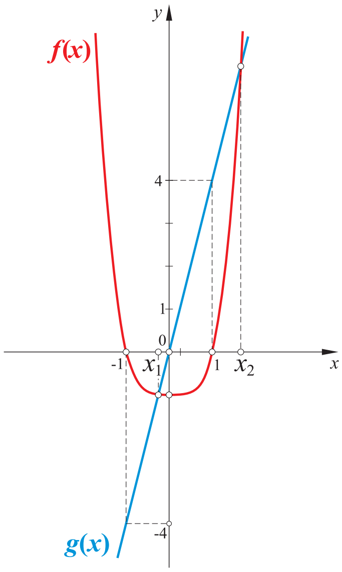
$$x^4 - 4x - 1 = 0.$$

Racionalna rješenja, ako postoje, moraju biti djelitelji slobodnog člana jednadžbe. Budući da 1 i -1 nisu rješenja, ova jednadžba nema racionalnih rješenja.

Postavlja se pitanje ima li navedena jednadžba iracionalna rješenja. Kako bismo odgovorili, istu ćemo jednadžbu promatrati u obliku:

$$x^4 - 1 = 4x.$$

Uvedimo funkcije $f(x) = x^4 - 1$ i $g(x) = 4x$ te nacrtajmo njihove grafove.



Sa slike vidimo da se grafovi funkcija $f(x)$ i $g(x)$ sijeku u dvjema točkama, tj. dana jednadžba ima dva realna rješenja $x_1 \in \langle -1, 0\rangle$ i $x_2 \in \langle 1, 2\rangle$ (jer je $f(2) > g(2)$). Pokušat ćemo naći ta rješenja. Zapišimo danu jednadžbu u obliku

$$x^4 - 4x - 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 1) = 0$$

i nađimo koeficijente a i b. Vrijedi:

$$\begin{aligned}&(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 1)\\ &\quad = x^4 + (a+b)x^3 + abx^2 + (b-a)x - 1\end{aligned}$$

pa slijedi da treba biti $a + b = 0$, $ab = 0$ i $b - a = -4$. Iz prve i treće jednadžbe dobivamo da je $b = -2$ i $a = 2$, ali i $ab = -4$ pa ovo rješenje ne zadovoljava. Kako dalje? Navest ćemo dva rješenja.

Rješenje 1. Zapišimo danu jednadžbu u obliku:

$$x^4 - 4x - 1 = (x^2 + ax + b)\left(x^2 - ax - \frac{1}{b}\right) = 0$$

i nađimo koeficijente a i b. Imamo

$$\begin{aligned}&(x^2 + ax + b)\left(x^2 - ax - \frac{1}{b}\right)\\ &\quad = x^4 + \left(b - a^2 - \frac{1}{b}\right)x^2 - \left(ab + \frac{a}{b}\right)x - 1,\end{aligned}$$

pa odavde slijedi:

$$\begin{aligned}b - a^2 - \frac{1}{b} &= 0\\ ab + \frac{a}{b} &= 4,\end{aligned}$$

prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, asefket@pmf.unsa.ba

odnosno

$$a^2 = b - \frac{1}{b}$$
$$a = \frac{4}{b + \frac{1}{b}},$$

a odavde

$$\frac{16}{\left(b + \frac{1}{b}\right)^2} = b - \frac{1}{b}$$

ili

$$\frac{16}{\left(b - \frac{1}{b}\right)^2 + 4} = b - \frac{1}{b}$$
$$\Longrightarrow \frac{16}{a^4 + 4} = a^2$$
$$\Longrightarrow a^6 + 4a^2 = 16$$
$$\Longrightarrow a^6 - 8 + 4a^2 - 8 = 0$$
$$\Longrightarrow (a^2)^3 - 2^3 + 4(a^2 - 2) = 0$$
$$\Longrightarrow (a^2 - 2)(a^4 + 2a^2 + 4) + 4(a^2 - 2) = 0$$
$$\Longrightarrow (a^2 - 2)(a^2 + 2a^2 + 8) = 0,$$

a odavde je $a^2 - 2 = 0$, tj. $a^2 = 2$. Dalje dobivamo $b - \frac{1}{b} = 2$ iz čega slijedi $b^2 - 2b - 1 = 0$ te $b = 1 \pm \sqrt{2}$ i

$$a_1 = \frac{4}{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = \frac{4}{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}},$$

tj. $a_1 = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$ i slično $a_2 = -\sqrt{2}$.

Sada imamo

$$x^4 - 4x - 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1) = 0$$

ili

$$x^4 - 4x - 1 = (x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1) = 0,$$

a odavde

$x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1 = 0$ ili $x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1 = 0$

te

$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$ i $x_{3,4} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{4\sqrt{2} + 2}}{2}$

Za ovo je rješenje bilo poprilično posla pa ćemo sada dati još jedno zanimljivo i jednostavnije rješenje.

Rješenje 2. Imamo

$x^4 - 4x - 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 0,$

a odavde je $(x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 0$, tj.

$$[x^2 + 1 - \sqrt{2}(x + 1)][x^2 + 1 + \sqrt{2}(x + 1)] = 0$$
$$\Longrightarrow (x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2})(x^2 + 1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1) = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 \text{ ili}$$
$$x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1 = 0,$$

odakle lako dobivamo dva realna i dva konjugirano kompleksna rješenja (koja su prikazana u prvom rješenju).

Napomena: U teoriji jednadžbi postoji metoda s pomoću koje se može riješiti svaka algebarska jednadžba četvrtog stupnja. Ta se metoda zove **Ferrarijeva metoda**.[1] Ova je metoda donekle zamršena pa je ovdje nećemo prezentirati. (Rješenje 2 je na tragu ove metode.) O toj metodi može se opširnije naći u [3].

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić (2006.): *Metodička zbirka zadataka sa osovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo.

2/ I. Gusić (1995.): *Matematički rječnik*, Element, Zagreb.

3/ B. Pavković, B. Dakić (1992.): *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb.

[1] Ludovico Ferrari (1522. – 1565.), talijanski matematičar, učenik Gioronima Cardana (1501. – 1576.)