

Dokučiti Eulerovu formulu za kompleksne brojeve osnovnim računskim operacijama

Šime Šuljić, Zadar

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Mnogi će kazati da je riječ o najljepšoj matematičkoj formuli svih vremena. Ona povezuje pet posebnih brojeva:

- jedinicu, prvi prirodni broj i neutralni element množenja
- nulu, poseban cijeli broj s kojim nije dozvoljeno dijeliti i neutralni element zbrajanja
- Ludolfovo broje π , vezan uz opseg i površinu kruga te općenito uz obla tijela i likove, ali i puno drugih grana matematike
- imaginarnu jedinicu i , broj koji kvadriran daje -1
- i na kraju Eulerov broj e , bazu prirodnog logaritma.

Na formulu nailazimo u mnogim učionicama i na mnogim plakatima koji populariziraju matematiku. Zanimljiva je to formula, čak i po estetskom dojmu, ali kako odgovoriti na temeljno pitanje u matematici: zašto? Leonard Euler je formulu dokazao s pomoću redova, a to znači da ni na srednjoškolskoj razini ne možemo ući u matematičko dokazivanje. Pristup, koji ćemo ovdje iznijeti uz pomoć računalnog programa *GeoGebra*, stariji je i od samog programa. Kada su se krajem prošlog stoljeća pojavili prvi računalni programi za interaktivnu geometriju, došla je na red i Eulerova formula.

Ideja je, dakle, već duže nazočna u raznim internetskim objavama. Meni je u posljednje vri-

jeme za oko zapeo videozapis Burkarda Polstera, profesora na *Monash University* u Melbourneu, Australiji, poznatijem kao *YouTube Mathologer* na istoimenom kanalu. Adresa videozapisa je <https://youtu.be/-dhHrg-KbJ0>. U njemu autor koristi računalni program *Wolfram Mathematica* da bi izradio izračune i geometrijske prikaze. Profesor je primjer zabavnog i dobrog predavača matematike zbog čega preporučujem da svakako pogledate ovaj, ali i druge njegove videozapise.

Bez obzira na dinamične izračune i geometrijske prikaze mislim da bi se za *Večer matematike* ili slične manifestacije s učenicima mogli izvesti ti ključni momenti videozapisa na računalnom programu *GeoGebra*.

Broj e

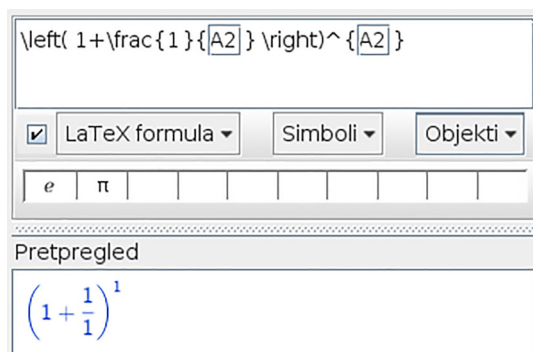
Profesor Polster dolazi do broja e preko primjera ukamaćivanja u banci. Stavimo li jedan dolar na račun u neku banku koja nakon godine dana daje isto toliko kamata, imat ćemo za godinu dana 2 dolara. Ali postoji i druga banka koja svakih pola godine dodaje našem ulogu polovinu vrijednosti. To znači da jedan dolar za pola godine naraste na 1.5 dolara, a onda za drugih šest mjeseci to naraste na 1.5 puta 1.5 jednako 2.25 dolara. To je zapravo $(1 + \frac{1}{2})^2$. Treća pak banka upisuje kamate svaka četiri mjeseca, što ukupno za godinu dana daje $(1 + \frac{1}{3})^3$ dolara.

U *GeoGebra*noj proračunskoj tablici lako ćemo dobiti taj prikaz i izračun numeričkih vrijednosti (vidi

Šime Šuljić, prof., Klasična gimnazija Ivana Pavla II., Zadar, simesu@gmail.com

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	Vrijednost
1	$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$	2
2	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$	2.25
3	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$	2.3704
4	$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$	2.4414
5	$\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5$	2.4883
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$	2.7048138294
1 000	$\left(1 + \frac{1}{1\,000}\right)^{1\,000}$	2.7169239322
10 000	$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000}$	2.7181459268
100 000	$\left(1 + \frac{1}{100\,000}\right)^{100\,000}$	2.7182682372
1 000 000	$\left(1 + \frac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000}$	2.7182804691

Tablica 1.



Slika 1.

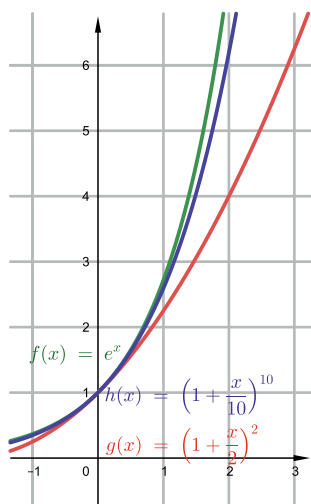
tablicu 1). U drugom stupcu tablice, u *GeoGebra*-u se zapravo upisuje dinamični tekst. Potrebno je upisati tekst u ćeliju, a zatim u kartici *Svojstva* uključiti opciju *Latex formula* (slika 1).

Važno je ćeliju A2 unijeti kao *GeoGebra* objekt u zapis iz padajućeg izbornika *Objekti*. Ćelije koje slijede u tom stupcu tada se dobiju jednostavnim razvlačenjem po stupcu. Numerička vrijednost dobije se upisom naredbe $(1+1/A2)^{A2}$ u ćeliju C2, pa razvlačenjem po stupcu. Kako brojeve prvog stupca povećavamo, tako u trećem stupcu dobivamo vrijednosti koje su sve bliže i bliže broju e . Zanimljivo je da u *GeoGebra* prozoru za simboličko računanje možemo dobiti i po volji mnogo znamenaka broja e . Naredba **Aproksimacija** ($e, 200$) daje nam prvih dvjesto znamenaka broja e :

2.718281828459045235360287471352662497757
24709369995957496696762772407663035354759
45713821785251664274274663919320030599218
17413596629043572900334295260595630738132
3286279434907632338298807531952510190.

A koliko je e^π ?

Potenciju e^3 dalo bi se izračunati barem aproksimativno $2.718... \cdot 2.718... \cdot 2.718...$. Ali, kako odrediti broj e^π kada je eksponent beskonačan decimalni broj? Znamo da je $e^\pi \approx \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^\pi$, odnosno $e^\pi \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\pi}$. Proširimo li razlomak brojem π , tada vrijedi: $e^\pi \approx \left(1 + \frac{\pi}{n\pi}\right)^{n\pi}$. Nazivnik razlomka i eksponent teže u beskonačnost povećavamo li n . Možemo čak zamijeniti izraz $n\pi$ parametrom m , koji će također postajati sve veći kako n postaje sve veći. Izraz bi izgledao ovako: $\left(1 + \frac{\pi}{m}\right)^m$. Ako umjesto broja π umetnemo neku drugu vrijednost, recimo varijablu x , lijeva nam je strana jednakosti eksponencijalna funkcija e^x , a desna strana jednakosti postaje funkcija $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$. Prikažimo obje funkcije u koordinatnom sustavu i mijenjajmo parametar m (slika 2). Vidimo da se svi ti grafovi približavaju grafu funkcije e^x . To nam omogućuje da s izvjesnom aproksimacijom i grafički možemo odrediti vrijednost potencije e^π .



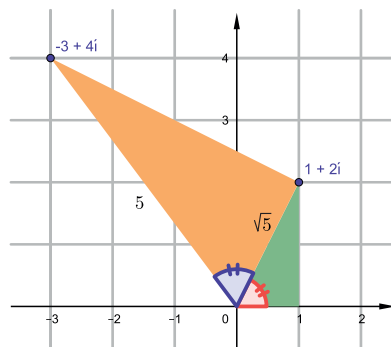
Slika 2.

Imaginarna jedinica

Broj i je kompleksni broj za koji vrijedi $e^2 = -1$. Koliko je $e^{i\pi}$, odnosno kojem broju teži $\left(1 + \frac{\pi i}{m}\right)^m = \left(1 + i\frac{\pi}{m}\right)^m$? Jednostavno možemo upisati takav izraz u traku za unos programa *GeoGebra* uz prethodno definiranje klizača m . Za $m = 100$, to je kompleksni broj $-1.0506 + 0.0011i$. Možemo naslutiti da se vrijednost približava broju -1 . Napravimo to geometrijski jer je puno zornije i elegantnije.

Geometrijski prikaz niza potencija kompleksnog broja

GeoGebra prikazuje kompleksne brojeve kao točke ravnine. Upišemo tako recimo broj $1 + 2i$ (slika 3). Uočiti ćemo da je njegova udaljenost od ishodišta $\sqrt{5}$. Možemo izmjeriti ili izračunati i kut koji ta spojnica broja s ishodištem zatvara s pozitivnim dijelom osi x . Kvadriramo li taj broj algebarski, dobit ćemo broj $-3 + 4i$. U koordinatnom sustavu možemo uočiti da je udaljenost dobivenog broja od ishodišta 5, odnosno, to je kvadrat udaljenosti broja koji smo kvadrirali, a kut koji zatvara s osi x je dvostruko veći. Kubiranje će pak povećati udaljenost broja od ishodišta na kub, a kut utrostručiti.

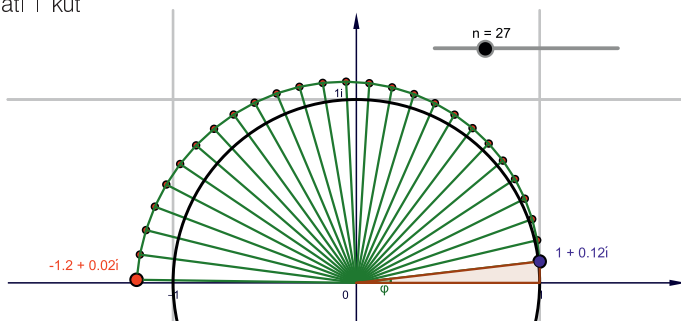


Slika 3.

Točke se mogu u *GeoGebri* zadavati s pomoću udaljenosti od ishodišta i kuta koji zatvara s pozitivnim dijelom osi x . Tako izražene koordinate zovu se **polarne koordinate** i pišu na način da ih u uređenom paru odvajamo točkom sa zarezom $(r; \varphi)$.

U nizu točaka $\left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$ prva je u pravokutnim koordinatama točka $(1, \pi)$. Neka je njezina udaljenost od ishodišta r , a kut koji zatvara s apscisom φ . To u *GeoGebri* možete dobiti naredbama **Duljina()** i **Kut()** ili izmjeriti odgovarajućim alatima alatne trake. Ako je udaljenost te prve točke od ishodišta r , a kut koji zatvara s osi x jednak φ , tada niz točaka možemo dobiti naredbom: **Niz((r^k; k*phi), k, 1, n)**. Što više povećavamo vrijednost klizača n , niz točaka konvergirat će broju -1 , odnosno vrijedi $e^{i\pi} = -1$ (slika 4).

Gotova stranica s interaktivnim *GeoGebri* uratom nalazi se na adresi <https://www.geogebra.org/m/V8GnqKuw>, ali preporučujem da sami pokušate izraditi slično.



Slika 4.