

Tangram u nastavi matematike, 2. dio

Andrea Kavajin i Nives Baranović, Split

Didaktička sredstva u nastavi matematike sama po sebi ne garantiraju uspješno učenje, ali uz odgovarajuću primjenu mogu osigurati prikladno okruženje za istraživački i kreativan rad te biti korisna podloga za učenje matematike i razvijanje matematičkog mišljenja.

U prvom dijelu istoimenog rada (MiŠ, br. 101) opisane su opće karakteristike drevne kineske slagalice i predložene neke početne aktivnosti. Ukratko je opisano porijeklo slagalice i nastanak pojma *tangram*, a zatim su definirani pojmovi *tan* i *tangram lik*. Predložene aktivnosti za rad s tangramom razvrstane su u tri grupe prema preporučenom redoslijedu izvođenja.

U ovom se radu, treća grupa aktivnosti proširuje istraživanjem konveksnih tangram likova jer su oni podloga za još tri nove grupe aktivnosti: razvijanje strategija, crtanje i prebrojavanje te izračunavanje, koje potom slijede.

Rad s tangramom

Prvu grupu aktivnosti, uvodno upoznavanje s tangramom te samostalno osmišljavanje i oblikovanje proizvoljnih likova, svakako je poželjno provesti prije korištenja tangram slagalice u nastavi matematike.

Druga grupa aktivnosti ima dvostruku ulogu: kroz aktivnosti mjerenja upoznaju se osnovne karakteristike tanova i tangram likova, a njihovim poznavanjem tangram slagalice može se postupno uvoditi u različite faze nastavnog procesa. Osim toga, poznavanje osnovnih karakteristika neophodno je za provođenje složenijih aktivnosti.

Treća grupa aktivnosti, proučavanje različitih vrsta likova, otvara mogućnosti kreativne upotrebe tan-

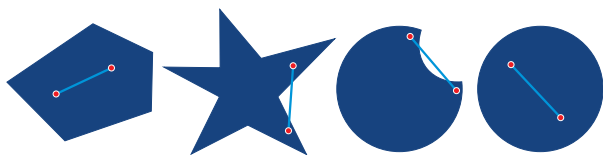
gram slagalice u nastavi matematike, osigurava podlogu za uvođenje određenih matematičkih pojmova te stvara okruženje za ozbiljna matematička istraživanja (MiŠ, br. 101).

Aktivnost 3. Različite vrste likova (nastavak)

Ukratko, posebnost tangram slagalice je u tome što se od sedam tanova može oblikovati na tisuće različitih tangram likova i svi oni površinom zauzimaju jednaku mjeru, bez obzira na oblik. Pri tome se određeni tangram lik može oblikovati na više različitih načina, ali pored toga, sukladni likovi mogu se oblikovati i od različitog broja tanova. Nadalje, među geometrijskim tangram likovima neki mogu biti pravilni, a drugi ne, neki su konveksni dok drugi nisu itd. U nastavku ovog teksta bavit ćemo se prvenstveno konveksnim likovima.

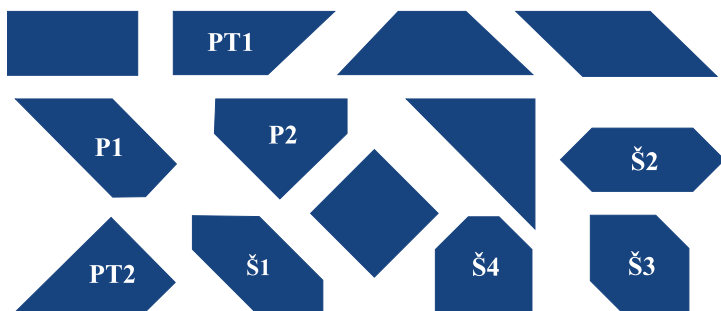
Konveksni likovi

Poseban podskup geometrijskih likova su konveksni likovi. Prisjetimo se, za lik u ravni kažemo da je **konveksan lik** ako taj lik za svake svoje dvije točke sadrži i cijelu dužinu određenu tim točkama (slika 1).

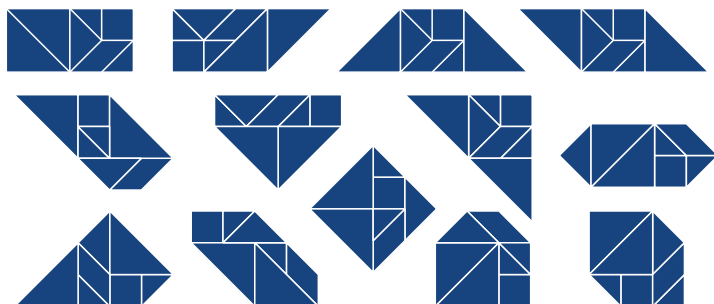


Slika 1. Konveksni i nekonveksni likovi

Jedna od posebnosti tangram slagalice je u tome što se među tisućama različitih tangram likova nalazi samo manji broj onih koji su konveksni. Naime, kineski matematičari Fu Traing Wang i Chuan-Chih Hsiung 1942. godine dokazali su da postoji samo 13 konveksnih tangram likova (vidjeti [1], [6], [10]) i to: jedan trokut, šest četverokuta, dva peterokuta i četiri šesterokuta (slika 2).



Slika 2. Konveksni tangram likovi



Slika 3. Slaganje konveksnih likova

Njihov se dokaz temelji na četiri leme koje opisuju karakteristike slaganja 16 malih tan trokuta u konveksan oblik, s pomoću kojih se može složiti najviše konveksni osmerokut. Glavni dio dokaza temelji se na činjenici da se svaki konveksan lik može upisati u pravokutnik iz čega se izvodi kvadratna diofantska jednačba sa šest nepoznanica. Ta jednačba ima 48 različitih rješenja koja određuju 20 različitih konveksnih likova među kojima je samo 13 tangram likova (slika 3). Njihov dokaz, koji je objavljen u [10], nije cjelovito prikazan, a ispušteni dijelovi nisu trivijalni. U radu [1], kroz vizualno analitički pristup, koji se može provoditi s učenicima već od osmog razreda, daje se prikaz svih 48 rješenja te način odabira 20 konveksnih, odnosno 13 konveksnih tangram likova.

Kada učenici steknu određeno iskustvo i rutinu, aktivnosti se mogu proširivati i međusobno povezivati. Tako na primjer, u početku oni mogu samo slagati konveksne likove uz zadani model, zatim mogu istraživati na koliko se različitih načina može oblikovati svaki od tih likova, na koliko različitih načina se svaki od njih može obojiti u dvije boje (popola), kako nacrtati određeni lik u kvadratnoj točkastoj mreži, kako ga proporcionalno uvećati ili umanjiti, kako odrediti površinu složenog lika uz zadanu veličinu tan kvadrata itd. Od osmog razreda pa nadalje mogu istraživati zašto je samo 13 konveksnih tangram likova, na koji se način to može dokazati itd.

Jedna od korisnih istraživačkih tangram aktivnosti može biti uspoređivanje opsega konveksnih tangram likova (tablica 2), pri čemu se opsezi mogu određivati služeći se podacima iz tablice 1 koja je prikazana u 1. dijelu članka (MiŠ 101). Ako bismo koristili da je tan kvadrat jedinični kvadrat, onda je uspoređivanje opsega daleko jednostavnije (prijedlog dan u [2] i [3]).

Na temelju podataka iz tablice 2 može se konstatirati da postoje likovi jednakog opsega i jednake površine, ali različitog oblika (npr. trokut, paralelogram, jednakokračni trapez). Zatim, od

Opseg	Vrsta		
$8a + 4b$	trokut	paralelogram	jednakokrani trapez
$10a + 2b$	pravokutni trapez (PT1)		
$4a + 6b$	pravokutni trapez (PT2)	peterokut (P1)	
$12a$	pravokutnik		
$6a + 4b$	peterokut (P2)	šesterokut (Š1)	šesterokut (Š2)
$8b$	kvadrat		
$8a + 2b$	šesterokut (Š3)	šesterokut (Š4)	

Tablica 2. Opsezi konveksnih tangram likova

svih likova jednake površine najmanji opseg ima šesterokut koji je najbliži pravilnom šesterokutu, a od svih četverokuta jednake površine najmanji opseg ima kvadrat, što je dobar uvod u istraživanje izoperimetrijskog problema.

Aktivnost 4. Razvijanje strategija

U aktivnostima slaganja određenog geometrijskog lika cilj ne bi trebao biti samo složiti tangram lik, već **razmišljati o strategiji slaganja** tog lika. Nakon što je aktivnost završena, korisno je razmotriti sve moguće strategije kojima su učenici odabrali lik slagali, a zatim istražiti sve moguće načine slaganja istog tangram lika.

Primjer. Tangram trokut

Tangram trokut može se oblikovati na dva bitno različita načina (slika 4). Ako se slaganje vrši nasumičnom metodom pokušaja i pogrešaka, moguće je da takav način provođenja aktivnosti uopće ne dovede do cilja. Ako se prije samog slaganja problem analizira: odakle krenuti, što prvo složiti, kolika je površina cijelog lika, kolika je duljina stranice traženog lika itd., a zatim se slaganje temelji na provedenoj analizi, tangram-aktivnost bit će uspješnija



Slika 4. Tangram trokut sastavljen na dva različita načina

(vidjeti [8]). Takav pristup osigurava razvoj strateškog planiranja i promišljanja.

Strategija slaganja tangram trokuta može se temeljiti na sljedećem: jedna polovica lika (mjere $8P$, u skladu s tablicom 1 iz prethodnog članka) prekrivena je dvama velikim tan trokutima, a druga polovica preostalim tanovima (5). Time smo problem slaganja podijelili u dva manja: najprije vidimo na koje se sve različite načine polovica lika može prekriti dvama velikim tan trokutima, a zatim provjerimo može li se preostali dio prekriti preostalim tanovima (5).

Na samom početku slaganja tangram likova, posebno ako se radi s manjim uzrastom učenika, strategija se može razvijati na liku zadanom konturom u stvarnoj veličini jer ga onda učenici trebaju samo popločiti. Nakon što učenici razviju određene strateške vještine, likovi se mogu zadavati idejno.

Jedna od važnih strategija u rješavanju složenijih zadataka jest znati primijeniti rezultat iz prethodnog zadatka. Služeći se tom strategijom, iz jednog tangram lika vrlo brzo se mogu oblikovati još neki tangram likovi (vidjeti [3]). Na primjer, kada se složiti tangram trokut sa slike 4 lijevo, dovoljno je pomaknuti samo jedan tan da bi se dobio jednakokrani tangram trapez, tangram paralelogram ili tangram pravokutnik, a pomicanjem dvaju tanova u trokut sa slike 4 desno, može se dobiti tangram kvadrat (slika 5).

Provedeći aktivnost slaganja tangram kvadrata s učenicima srednjoškolske dobi, Tchoshanov je utvrdio **četiri razine strateškog slaganja**, označavajući ih od 0 do 3. Osobe koje se nalaze



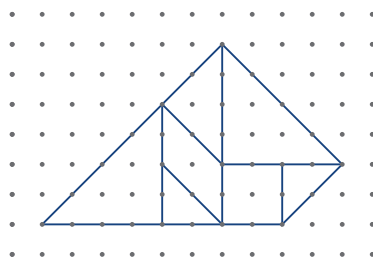
Slika 5. Strateško slaganje konveksnih tangram likova

na nultoj razini su osobe koje slaganje provode nasumično, bez ikakve strategije. Na prvoj razini su osobe koje pokušavaju strateški slagati, ali još uvijek nemaju dovoljno razvijeno strateško mišljenje (predstrateška razina). Na drugoj razini su oni koji djeluju polustrateški tako da novi lik slažu služeći se svojstvima tanova, s pomoću kojih sastavljaju tangram kvadrat. Na primjer, dijagonala kvadrata dijeli kvadrat na dva jednakokračna sukladna trokuta, a kako dva velika tan trokuta čine jedan trokut koji zauzima polovicu kvadrata, preostalih pet tanova treba složiti u trokut koji će dati drugu polovicu kvadrata. Zadnja, treća razina je razina strateškog mišljenja.

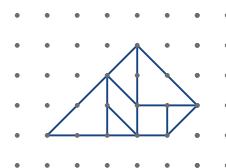
Osobe koje imaju razvijeno strateško mišljenje najprije osmisle strategiju, a onda je primijene u svrhu postizanja cilja. U ovom slučaju, osobe koje imaju razvijeno strateško mišljenje u mogućnosti su uspostaviti odnos između površine traženog tangram kvadrata i duljine njegove stranice. Kada se odredi duljina stranice kvadrata, onda se taj kvadrat vrlo brzo izgradi na temelju poznavanja duljine njegove stranice (vidjeti [3], [8]).



a)



b)



c)

Slika 6. Crtanje tangram likova

Aktivnost 5. Crtanje i prebrojavanje

Oblikovanje tangram likova pridonosi razvoju vizualno-prostornih vještina, bez obzira na koji se način oblikovanje vrši: s pomoću fizičkog modela tangram slagalice ili virtualno na računaru, tabletu, mobitelu i sl. (vidjeti [4], [5], [7], [8], [9]). Osim fizičkim ili virtualnim slaganjem tanova u određeni tangram lik, razvoju vizualno-prostornih vještina pridonosi crtanje ili konstruiranje oblikovanih likova. Crtanje i konstruiranje može se provoditi na papiru, ručno ili s pomoću geometrijskog pribora ili pak u programu dinamičke geometrije (vidjeti [4], [5], [7]). Tako su na primjer, sve originalne slike iz ovog rada oblikovane u programu dinamičke geometrije. Posebnost tangram slagalice je i u tome što se konveksni tangram likovi mogu nacrtati u kvadratnoj točkastoj mreži, a onda se otvaraju razne druge mogućnosti primjene.

Crtanje konveksnog tangram lika

Konveksni tangram likovi crtaju se u kvadratnoj točkastoj mreži tako da se svi vrhovi tanova smjeste u točke mreže. Pri tome se likovi mogu proporcionalno umanjivati ili uvećavati. Crtanje se može provoditi nasumično, bez razmišljanja (što obično nije uspješno), a mogu se koristiti i neke strategije: crtanje može započeti od konture (što se ne preporučuje), od najmanjeg ili od najvećeg tana itd.

Primjer. Tangram trapez

Oblikovani pravokutni tangram trapez (slika 6a) nacrtan je u točkastoj kvadratnoj mreži tako da su

vrhovi svih tanova smješteni u točke mreže. Jedan lik je proporcionalno uvećan (slika 6b), a drugi proporcionalno umanjen (slika 6c). Crtanje može započeti od tan kvadrata ili od velikog tan trokuta.

Kad je tangram lik nacrtan, u mreži ili izvan nje, mogu se prebrojavati određeni likovi unutar promatranog lika. Na primjer, u nacrtanom tangram trapezu može se izdvojiti 11 četverokuta od kojih je 1 nekonveksan, a među preostalih 10 je 8 trapeza. Prilikom prebrojavanja određenih likova u nacrtanom tangram liku, mogu se koristiti određene strategije: postupno prebrojavanje s pomoću istaknutih vrhova, postupno bojenje i uočavanje vrsta itd.

Nadalje, nacrtani tangram lik može služiti i kao podloga za bojenje, bilo polovice ili nekog drugog dijela, što je dobra podloga za uvođenje pojma razlomka, omjera, postotka, klasične vjerojatnosti itd. Pri tome su jako korisni podatci koji su dani u tablici 1 iz prethodnog članka.

Osim toga, može se određivati na koliko se različitih načina neki tangram lik može obojiti u dvije boje po pola (slika 7) ili na koliko se različitih načina može odabrati jedna četvrtina nekog lika itd. Za takvo se prebrojavanje također mogu razvijati određene strategije.



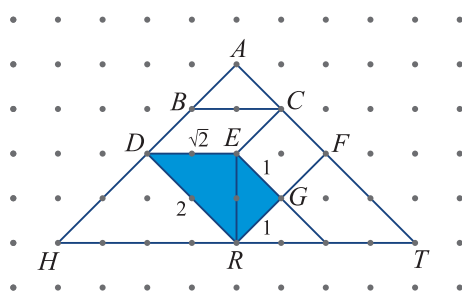
Slika 7. Neki načini bojenja polovice površine trapeza

Aktivnost 6. Izračunavanje

Liku koji je smješten u kvadratnoj mreži mogu se određivati duljine stranica i površine tanova, opseg i površina cijelog lika. Zatim se mogu proučavati i izdvajati sukladni i slični likovi, sličnim likovima mogu se određivati koeficijent sličnosti itd., (vidjeti [3]).

Primjer. Tangram trokut

Na slici 8 prikazan je tangram trokut u kvadratnoj točkastoj mreži, a unutar njega je istaknut četverokut $DRGE$. Ako je tan kvadrat jedinični kvadrat (u ovom slučaju kvadrat $EGFC$), onda su duljine stranica četverokuta $DRGE$ redom: $|DR| = 2$, $|RG| = 1 = |EG|$, $|DE| = \sqrt{2}$, a veličine unutarnjih kutova su: $\sphericalangle D = 45^\circ$, $\sphericalangle R = 90^\circ = \sphericalangle G$, $\sphericalangle E = 135^\circ$. Na temelju kutova može se zaključiti da su stranice $\overline{DR}$ i $\overline{EG}$ međusobno paralelne i okomite na stranicu $\overline{RG}$ pa je četverokut $DRGE$ pravokutni trapez.



Slika 8. Tangram trokut u kvadratnoj mreži

Nadalje, unutar prikazanog tangram trokuta može se uočiti još pet pravokutnih trapeza (izuzev kvadrata): $ADEC$, $CERF$, $HRED$, $ADRT$ i $AHRF$. Određivanjem duljina njihovih stranica i veličina njihovih unutarnjih kutova te uspoređivanjem s trapezom $DRGE$ dolazi se do zaključka da su trapezi $ADEC$ i $CERF$ sukladni s trapezom $DRGE$ jer su im odgovarajuće stranice i kutovi podudarni, a trapezi $HRED$, $ADRT$ i $AHRF$ su slični trapezu $DRGE$ jer su im odgovarajuće stranice proporcionalne (prvi s koeficijentom $\sqrt{2}$, drugi i treći s koeficijentom 2), a odgovarajući kutovi podudarni. Pri tome su pravokutni trapezi $ADRT$ i $AHRF$ međusobno sukladni.

Nadalje se mogu varirati zadatci s mjerama odgovarajućih površina. Na primjer, ako je osnovni kvadrat mreže jedinični kvadrat, opseg prikazanog tangram trokuta je $8 + 8\sqrt{2}$, a mjera površine je 16. Ako je tan kvadrat jedinični kvadrat, opseg trokuta je $8 + 4\sqrt{2}$, mjera površine je 8, a ako je tan

kvadrat površine 3, opseg trokuta je $8\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$, a mjera površine je 24. S obzirom na to da kvadratna mreža pruža mogućnost različitog načina određivanja mjera, korisno je da učenici ovu aktivnost najprije provode sami, a zatim se osvrnuti i razmotriti njihove različite pristupe.

Koja će se od spomenutih aktivnosti koristiti, kada i kako, ovisi prije svega o iskustvu i vještinama nastavnika, a zatim o uzrastu učenika, o temi koja se želi obraditi, o cilju s kojim se aktivnost provodi itd.

Zaključna promišljanja

Na prvi pogled drevna kineska slagalica tangram možda ne izgleda kao (ozbiljan) matematički alat, ali već nakon kraćeg upoznavanja osnovnih karakteristika vidljivo je da ona nudi mnoštvo mogućnosti za primjenu u učenju matematičkih sadržaja i za razvoj matematičkog mišljenja (samostalno ili u nastavi matematike). Jer, osim što učenje s pomoću tangram slagalice potiče aktivno sudjelovanje učenika, njihovu motivaciju i interes, kreativnost i maštu, kroz tangram aktivnosti učenici obogaćuju matematički rječnik, razvijaju strategiju rješavanja problema, vizualno-prostorne vještine, samostalno istražuju, uočavaju pravilnosti i postavljaju tvrdnje, uče s većim razumijevanjem itd. (vidjeti [1], [4], [5], [7], [8], [9]).

Poznato je da mnogi učenici imaju otpor prema učenju matematičkih sadržaja, posebice geometrijskih, a prema Van Hieleu uzrok ove pojave je najčešće posljedica neprimjerenog poučavanja (vidjeti [1], [9]). Istraživanja pokazuju da strateško rješavanje geometrijskih problema poboljšava osjećaj za prostor, a razne strateške vještine mogu se razviti između ostalog i kroz tangram aktivnosti (vidjeti [3]). Osim toga, tangram aktivnosti pomažu u razvoju geometrijskog mišljenja, a samim time pomažu i u savladavanju teškoća pri učenju geometrije (vidjeti [1], [7], [9]).

Tangram aktivnosti opisane u ovom radu mogu se provoditi s različitim uzrastima, izvan učionice, ali

i na nastavi matematike. No, jako je važno da onaj tko ih provodi najprije sam stekne određene vještine, a zatim da tangram aktivnosti promišljeno odabire, ciljano usmjerava i pažljivo prilagođava uzrastu s kojim radi.

LITERATURA

- 1/ N. Baranović, S. Lehman (2016.): Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti. U: M. Mateljević (ur.), *Zbornik radova VII simpozijum "Matematika i primene"*, V(1), str. 81–92, Beograd: Matematički fakultet sveučilišta u Beogradu.
- 2/ B. Dakić (2009.): Matematičke igračke, *Matematika i škola*, 62, str. 87–90.
- 3/ A. Kavajin (2016.): *Tangram i njegova primjena*, (Diplomski rad), Filozofski fakultet u Splitu.
- 4/ K. Khairiree (2015.): Creative Thinking in Mathematics with Tangrams and The Geometer's Sketchpad, In the *Proceedings of the 20th Asian Technology Conference in Mathematics*, (str. 153–161). Leshan, China, preuzeto s <http://atcm.mathandtech.org/EP2015/invited/11.pdf> (10. 6. 2010.).
- 5/ S. Olkun, N. B. Sinoplu i D.. Deryakulu (2005.): Geometric Explorations with Dynamic Geometry Applications based on van Hiele Levels, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* (str. 1–12). Preuzeto s <http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm> (10. 6. 2010.).
- 6/ P. Scott (2006.): Convex tangram, *Australian Mathematics Teacher*, 62(2), str. 2–5.
- 7/ N. M. Siew i S. Abdullah (2012.): Learning Geometry in a Large – Enrollment Class: Do Tangrams Help in Developing Students' Geometric Thinking?, *British Journal of Education, Society & Behavioural Science*, 2(3), str. 239–259.
- 8/ M. Tchoshanov (2011.): Building Students' Mathematical Proficiency: Connecting Mathematical Ideas Using the Tangram, *Learning and Teaching Mathematics*, 10 str. 16–23.
- 9/ P. M. Van Hiele (1999.): Developing geometric thinking through activities that begin with play, *Teaching children mathematics*, 5(6), str. 310–316.
- 10/ F. T. Wang i C. C. Hsiung (1942.): A Theorem on the Tangram, *The American Mathematical Monthly*, 49(9), str. 596–599.