

Površina trapeza

U panoptikumu ovog broja Miš-a nalazi se osam crteža – osam različitih dokaza bez riječi formule za računanje površine trapeza. Sa svake se slike može iščitati drukčija poruka o valjanosti te formule, bez dodatnih obrazloženja riječima. Ipak, ovdje možete pročitati njihove kratke opise.



Trapez je jedan od onih četverokuta kojima je jednostavno izračunati površinu. Pri izvođenju formule za površinu trapeza uobičajen je postupak koji je predložen na slici 1 u panoptikumu. Polovištem F kraka $\overline{BC}$ položi se pravac DF te se odredi njegovo sjecište E s pravcem AB . Tako je dobiven trokut BEF sukladan trokutu CDF , a trapez $ABCD$ pretvoren je u trokut AED jednake površine. Osnovica tog trokuta ima duljinu $a + c$ te mu je površina jednaka

$$P = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v$$

što je ujedno i površina trapeza.

Pogledajmo sada sliku 2 panoptikuma. Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli trapez na dva trokuta, trokut ABC i trokut ACD . Ti trokuti imaju jednake visine. Površina prvog je $\frac{1}{2}av$, a površina drugog $\frac{1}{2}cv$. Zbrojimo te dvije površine pa imamo:

$$P = \frac{1}{2}av + \frac{1}{2}cv = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v.$$

Slijedi postupak (slika 3 u panoptikumu) koji je čest u rješavanju problema vezanih uz trapez. Položimo vrhom D trapeza $ABCD$ paralelu $\overline{DE}$ sa $\overline{BC}$ i tako trapez podijelimo na trokut AED s osnovicom $a - c$ i visinom v te paralelogram $EBCD$ iste visine. Površina trapeza tada je jednaka

$$P = \frac{1}{2}(a - c) \cdot v + cv = \frac{1}{2}(a - c + 2c) \cdot v = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v.$$

Na slici 4 panoptikuma uočimo parove sukladnih trokuta. Površina trapeza zbroj je površina dvaju pravokutnika, jednoga sa stranicama duljina a i $\frac{v}{2}$ i drugoga sa stranicama c i $\frac{v}{2}$. Dakle je

$$P = a \cdot \frac{v}{2} + c \cdot \frac{v}{2} = \frac{(a + c) \cdot v}{2}.$$

Slikom 5 panoptikuma dan je još jedan jednostavan izvod formule za površinu trapeza. Uz dani trapez $ABCD$ dodamo sukladan trapez BB_1C_1C i tako dobijemo paralelogram AB_1C_1D kojemu je površina jednaka $(a + c) \cdot v$, a to je dvostruko više od površine trapeza $ABCD$.

Rješenje donekle slično prethodnom vidimo na slici 6 u panoptikumu. Točke G i H polovišta su krakova trapeza $ABCD$. Sada uz trapez $ABHG$ prislonimo trapez $BEFH$ sukladan trapezu $GHCD$. Uočimo paralelogram $AEFG$ koji je površinom jednak površini trapeza $ABCD$. Dakle, vrijedi

$$P = P(AEFG) = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v.$$

Promotrimo sada sliku 7 panoptikuma. Trapez $ABCD$ pretvorili smo u pravokutnik jednake površine. Pritom su K i L polovišta krakova $\overline{BC}$ odnosno $\overline{AD}$.

Nadalje je

$$\begin{aligned} a + c &= |AB| + |CD| = |EF| + |HG| \\ &= 2|EF| \end{aligned}$$

$$\text{te } |EF| = \frac{1}{2}(a + c) \text{ i konačno } P = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v.$$

I na kraju razmotrimo sliku 8 u panoptikumu. Površina trapeza $ABCD$ zbroj je površina dvaju tamnije osjenčanih trokuta i svjetlije osjenčanog pravokutnika. Neka je standardno $|AB| = a$, $|CD| = c$

pa tada imamo:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(m + n) \cdot v + c \cdot v \\ &= \frac{1}{2}(m + n + c) \cdot v + \frac{1}{2}c \cdot v \\ &= \frac{1}{2}(a + c) \cdot v. \end{aligned}$$

Iz knjige:

B. Dakić, *Matematika u boji*, dokazi bez riječi, Element, Zagreb, 2018.

Uz 101. broj Miš-a

Broj 101 je centralni deseterokutni broj

Prirodne brojeve vrlo zorno možemo predložiti točkicama pri čemu jedna točkica predstavlja broj 1. Slažući točkice tako da one tvore različite geometrijske oblike, dobivamo posebne nizove takozvanih **figurativnih brojeva**. Osim jednostavnih poligonalnih brojeva, postoje i **centralni poligonalni brojevi** koji se formiraju tako da se oko jedne centralne točke grade mnogokuti s istim brojem stranica.

Broj 101 tako spada među **centralne deseterokutne brojeve**. Prvi u tom nizu je 1, predstavljen samo jednom točkicom. Idući je 11, a dobiva se tako da oko jedne točkice rasporedimo još 10 točkica u obliku deseterokuta. Slijedi broj 31 koji se iz prethodnog koraka dobiva tako da oko deseterokuta rasporedimo sljedećih 20 točkica koje predstavljaju veći deseterokut ($1 + 10 + 20 = 31$).

Postupak se analogno nastavlja tako da dodajemo 30 točkica, pa 40 itd. U n -tom koraku oko vanjskog deseterokuta dodajemo $10 \cdot (n - 1)$ novih točkica, pa vrijedi:

$$D_n = D_{n-1} + 10(n - 1).$$

Svaki centralni deseterokutni broj D_n možemo dobiti s pomoću nerekurzivne formule

$$D_n = 5(n - 1)^2 + 5(n - 1) + 1,$$

pri čemu je n prirodan broj. Navedimo prvih nekoliko takvih brojeva: 1, 11, 31, 61, 101, 151, 211, 281, 361, 451, 551, 661, ... Uočimo i to da su svi centralni deseterokutni brojevi neparni i završavaju znamenkom 1, stoga su mnogi od njih prosti brojevi.

I na kraju, posebno je zanimljiva veza centralnih deseterokutnih brojeva s jednostavnim trokutastim brojevima. Ako $n - 1$. trokutasti broj pomnožimo s 10 i dodamo mu 1, dobit ćemo n -ti centralni deseterokutni broj. Ili jednostavnije: dovoljno je uz posljednju znamenku $n - 1$. trokutastog broja dopisati znamenku 1 i dobit ćemo n -ti centralni deseterokutni broj.

