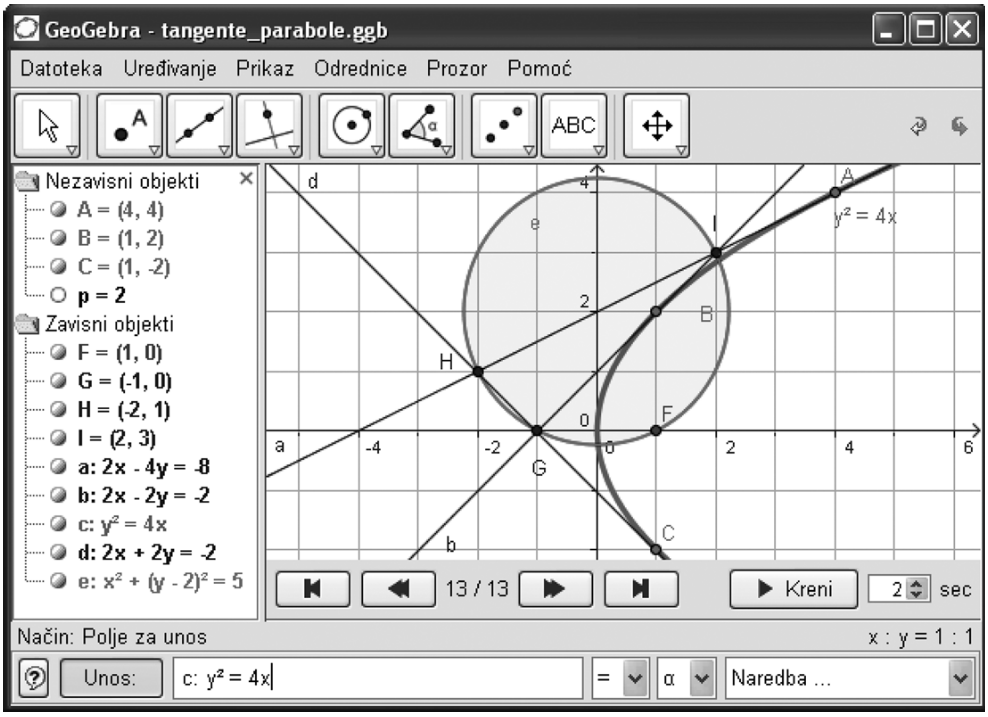
Računalo

GeoGebra (4)

U carstvu čunjosječnica

Šime Šuljić, *Pazin*

Nova školska godina, novi broj *Miš*-a i novi nastavak napisa o prvom računalnom programu dinamične geometrije na hrvatskom jeziku. Vjerujem da su se mnogi za vrijeme ljetnog odmora ugodno zabavili upoznajući mogućnosti ovog malog, a snažnog programa. Poklonici *GeoGebre*, okupljeni oko međunarodnog virtualnog skladišta uradaka na internetskoj adresi `http://www.geogebra.at/en/upload/`, bili su neumorni i u jednom su trenutku imali toliko živu proizvodnju raznih datoteka kao da uopće nije sezona godišnjih odmora. Velik dio tih uradaka odnosio se na krivulje drugog reda i specijalne ravninske krivulje. *GeoGebra* je na tim materijalima pokazivala svoju moć, a s druge strane, kada "odvrtite" korake konstrukcije unazad, spoznate da je konstrukcija bila vrlo jednostavna. Točno, kroz ljeto nam je autor programa Markus Hohenwarter u inačici programa 2.6, između ostalog ugradio mogućnost prikaza *trake za korake konstrukcije* (izbornik *Prikaz*). Tako smo pored već postojećeg izbornika *Opisa konstrukcije* dobili još jednog "analitičara" preuzetih datoteka s Interneta, a ujedno i zgodan alat za demonstraciju vlastitih konstrukcija korak po korak.

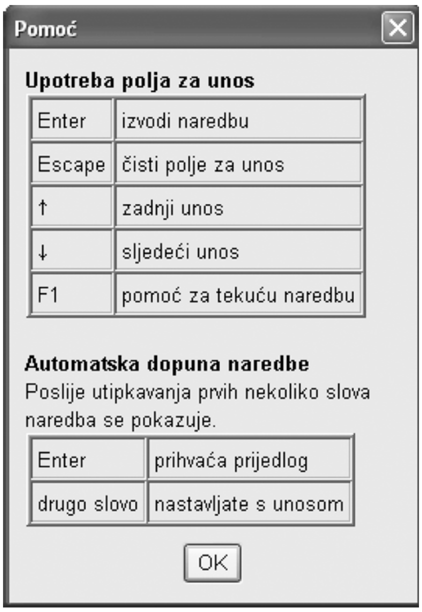


Slika 1.

Krivuljama drugog reda i analitičkoj geometriji dan je značajan prostor u našem srednjoškolskom programu. Seminarski i maturalni radovi često zadiru u to područje matematike. Taj dio matematike izuzetno je zahvalan za pristup preko računala, bilo da se krivulje drugog reda konstruiraju preko svojih definicija i geometrijskih svojstava, ili da se istražuju njihova svojstva, ili provjeravaju određene tvrdnje, ili pak jednostavno rješavaju i kreiraju zadaci. Od svih računalnih programa koji mogu manipulirati krivuljama drugog reda, *GeoGebra* je vjerojatno favorit u svojoj kategoriji. Posvetit ćemo stoga toj temi cijeli ovaj članak.

1. Pišući crtamo

Cijele konstrukcije možemo izvoditi kroz *Polje za unos*. Da bismo se prisjetili pravila za upis naredbi, koordinata, brojeva i slično, u *Polje za unos* kliknimo na žuti upitnik u donjem lijevom kutu programskog prozora. Time aktiviramo podsjetnik za jednostavnu pomoć, koji nam značajno skraćuje vrijeme upisivanja dužih naredbi (slika 2).



Slika 2.

konika	jednadžba
elipsa e	e: $9x^2 + 16y^2 = 144$
hiperbola h	h: $x^2/9 - (y-4)^2/16 = 1$
parabola p	p: $y^2 = 4x$
elipsa e_2	e_2: $9x^2 + 12xy + 16y^2 = 144$
kružnica k	k: $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$

Konike upisujemo kao jednadžbe drugog stupnja po x i y. Možemo koristiti prethodno definirane varijable (brojeve, točke, vektore). Ako ne želimo da nam oznaku za koniku program daje automatski, ona se mora zadati na početku unosa odvojena dvotočkom.

Ako prethodno kroz *polje za unos* zadamo koeficijente, npr. $a = 4$ i $b = 3$, tada možemo ovako zadati elipsu: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Prisjetimo se da za naznaku množenja među varijablama koristimo znak $*$ ili prazno mjesto.

2. Rješavanje zadatka i provjera slutnje

Zadatak. Dokaži da kružnica koja prolazi sjecištima tangenata na parabolu $y^2 = 4x$ u njezinim točkama s ordinatama -2, 2 i 4 prolazi fokusom parabole.

Poznato je kako bismo ovaj zadatak riješili klasično računski:

— odredimo točke uvrštavajući njihove ordinate u jednadžbu parabole;

— odredimo tangente na parabolu u tim točkama pomoću jednadžbe tangente u točki parabole;

— nađemo sjecišta triju tangenata rješavajući sustave jednadžbi;

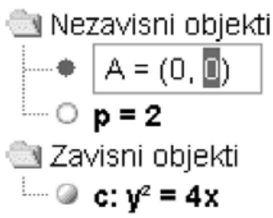
— odredimo jednadžbu kružnice pomoću triju pripadnih točaka;

— odredimo koordinate fokusa i provjerimo da zadovoljavaju jednadžbu kružnice.

Riječ je o tipičnom "rudarskom" zadatku gdje se lako pogriješi i još lakše izgubi volja za privođenjem zadatka kraju. Crtež je u ovakvom zadatku uvijek dobrodošao, a s crtežom u *GeoGebri* rezultat će se moći provjeravati pri svakom koraku rješavanja. I ne samo to. Kad već posežemo za *GeoGebrom*, neka naši ulazni podaci zadatka budu zadani kroz opće brojeve i jednadžbe da ih kasnije možemo varirati i provjeriti vrijedi li tvrdnja općenitije nego je iskazana u zadatku. Dakle, zadajmo jednadžbu parabole u općem obliku $y^2 = 2px$, prethodno definiravši poluparametar p. Točke ćemo definirati kao bilo koje točke zadane parabole, a potom im pridijeliti konkretne vrijednosti.

Da bismo riješili zadatak, potrebno je kroz polje za unos unijeti niz naredbi:

1. **p = 2** ;
2. **y^2= 2p x**;
3. **Točka[c]** — napomena: ova naredba unosi se triput, a program će uvijek nacrtati točku u tjemenu parabole. Želimo li joj pridijeliti zadane koordinate, to možemo napraviti na dva načina; ili jednostavnim pomakom miša na željenu poziciju ili dvostrukim klikom na koordinate točke u algebarskom prozoru promijeniti ordinatu u zadanu vrijednost, npr. 4. Program će sam automatski preračunati apscisu i točka će se u geometrijskom prozoru premjestiti (slika 3);



Slika 3.

4. **Tangenta[A,c]**;
5. **Tangenta[B,c]**;
6. **Tangenta[C,c]**;
7. **F = Žarište[c]** — i ostalim objektima mogli smo odrediti oznake, a ako to nismo učinili, program će ih odrediti sam po abecednom redoslijedu;
8. **Sjecište[a,b]**;
9. **Sjecište[a,d]**;
10. **Sjecište[b,d]**;
11. **Kružnica[G,H,I]** — crta kružnicu kroz tri točke. Upisuju se stvarne oznake sjecišta tangenata;
12. **Veza[e,F]** — naredba daje poruku upozorenja o pripadnosti točke F kružnici c.

Tako smo riješili dani zadatak, ali sada se može istražiti slutnja da kružnica možda prolazi žarištem parabole bez obzira na položaj točaka A, B i C na njoj. Pomičimo mišem točke po paraboli i promatrajmo odnos žarišta i kružnice. Slutnja se pokazuje ispravnom, štoviše, vrijedi za bilo koju parabolu. U tom smislu kliknimo na poluparametar i mijenjajmo ga tipkama $+$ i $-$ na tipkovnici. Očito da kružnica koja prolazi sjecištima bilo kojih triju tangenata parabole prolazi i žarištem parabole. Ta tvrdnja zahtijevala bi matematički dokaz! I zaista, prije nekoliko godina takav se zadatak našao na natjecanju.

3. Popis naredbi

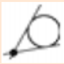
U prethodnom primjeru upoznali smo nekoliko naredbi koje manipuliraju konikama. Pozamašan je popis naredbi i njihovih varijacija koje se odnose na konike:

1. **Parametar[parabola]** — parametar parabole (udaljenost ravnalice i žarišta);
2. **GlavnaPoluos[konika]** — duljina glavne poluosi konike;
3. **SporednaPoluos[konika]** — duljina sporedne poluosi konike;
4. **Ekscentricitet[konika]** — ekscentricitet konike;

5. **Kut[konika]** — kut zakreta glavne osi konike;
6. **Središte[konika]** — središte kružnice, elipse ili hiperbole;
7. **Žarište[konika]** — (oba) žarišta konike;
8. **Tjeme[konika]** — (sva) tjemena konike;
9. **Sjecište[pravac g, konika c]** — sjecište pravca g i konike c (najviše dva);
10. **Sjecište[pravac g, konika c, broj n]** — n-to sjecište pravca g i konike c;
11. **Sjecište[konika c, konika d]** — sva sjecišta dviju konika (najviše četiri);
12. **Sjecište[konika c, konika d, broj n]** — n-to sjecište dviju konika;
13. **Tangenta[točka A, konika c]** — (sve) tangente kroz točku A na koniku c;
14. **Tangenta[pravac g, konika c]** — (sve) tangente na koniku c koje su paralelne s pravcem g;
15. **Asimptota[hiperbola c]** — obje asimptote hiperbole;
16. **Ravnalica[parabola c]** — Ravnalica parabole c;
17. **Osi[konika c]** — glavna i sporedna os konike c;
18. **GlavnaOs[konika c]** — glavna os konike c;
19. **SporednaOs[konika c]** — sporedna os konike c;
20. **Polara[točka A, konika c]** — polara točke A (A je pol) konike c;
21. **Dijametar[pravac g, konika c]** – daje pravac nositelj konjugiranog promjera, tj. pravac koji prolazi polovištima svih tetiva konike c usporednih s pravcem g;
22. **Dijametar[vektor v, konika c]** — daje pravac nositelj konjugiranog promjera, tj. pravac koji prolazi polovištima svih tetiva konike c koje imaju smjer vektora v;
23. **Luk[konika c, točka A, točka B]** — luk konike između točaka A i B koje pripadaju koniki c (kružnica ili elipsa);
24. **Luk[konika c, broj t1, broj t2]** — luk konike između dvaju parametarskih vrijednosti t_1 i t_2 koje su zadane u sljedećem obliku: kružnica: $(r\cos(t), r\sin(t))$, gdje je r kružni radijus, ili elipsa: $(a\cos(t), b\sin(t))$, gdje su a i b duljine prve i druge poluosi;
25. **Isječak[konika c, točka A, točka B]** — isječak konike između dviju točaka A i B koje pripadaju koniki c (kružnica ili elipsa);
26. **Isječak[konika c, broj t1, broj t2]** — kružni isječak između dvaju parametarskih vrijednosti t_1 i t_2 koje su zadane u sljedećem obliku: kružnica: $(r\cos(t), r\sin(t))$, gdje je r kružni radijus, ili elipsa: $(a\cos(t), b\sin(t))$, gdje su a i b duljine prve i druge poluosi;
27. **Translacija[konika c, vektor v]** — translatira koniku c za vektor v;
28. **Rotacija[konika c, kut fi]** — rotira koniku c za kut fi oko ishodišta koordinatnog sustava;
29. **Rotacija[konika c, kut fi, točka B]** — rotira koniku c za kut fi oko točke B;
30. **Zrcaljenje[konika c, točka B]** — zrcali koniku c preko točke B;
31. **Zrcaljenje[konika c, pravac h]** — zrcali koniku c preko pravca h;
32. **Rastezanje[konika c, broj f, točka S]** — homotetično preslikava ("rasteže") koniku c iz točke S za faktor rastezanja f;
33. **Veza[objekt a, objekt b]** — pokazuje poruku o vezi između objekta a i b. Ova nam naredba omogućuje da odredimo jesu li dva objekta jednaka, leži li točka na pravcu ili koniki, i u kojem su međusobnom položaju pravac i konika (tangenta, sekanta, pravac bez zajedničkih točaka ili asimptota konike).

Naredbe se nalaze u padajućem izborniku krajnje desno na dnu prozora programa. Kada ih upišemo u *polje za unos*, dovoljno je pritisnuti tipku F1 da bismo pozvali prozor s prikazom svih varijacija unosa za tu naredbu.

4. Alati posebne namjene

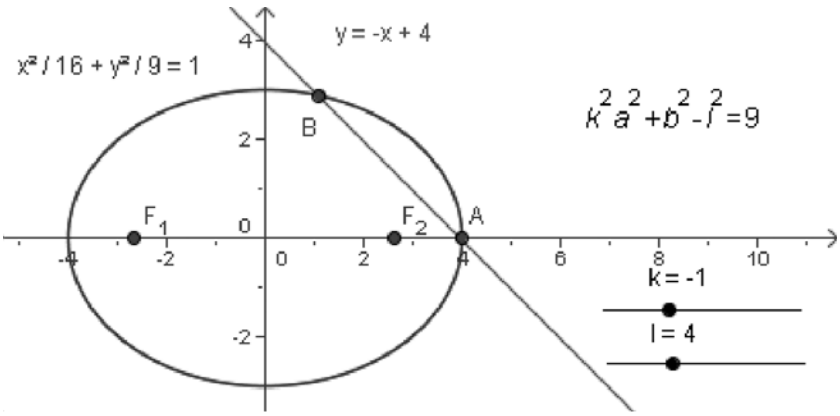
Način	Naziv	Opis
	**Polovište ili središte**	Kliknite na kružnicu, elipsu ili hiperbolu da biste dobili njezino središte.
	**Tangente**	Tangente na konike možemo zadati na dva načina: odabir točke *A* i konike *c* daje sve tangente na *c* koje prolaze kroz *A*; odabir pravca *g* i konike *c* daje sve tangente na *c* koje su usporedne s *g*.
	**Polara ili konjugirani promjer**	Ovaj način daje polaru, odnosno konjugirani promjer konike. Odabir točke i konike daje polaru. Odabir pravca ili vektora i konike daje pravac nositelj konjugiranog promjera.
	**Konika kroz pet točaka**	Odabir pet točaka proizvodi koniku kroz njih. Ako bilo koje četiri od ovih pet točaka ne leže na pravcu, konika je određena.

5. Uvjet dodira kroz dinamičnu demonstraciju

Često se ističe da su svi računalni programi dinamične geometrije izuzetno pogodni za demonstraciju u učionici uz pomoć LCD projektora. Podrazumijeva se da nastavni materijal za demonstraciju treba satima izrađivati prije same nastave. Kada je u pitanju *GeoGebra* i sadržaji analitičke geometrije, to uopće nije tako. U razredu, dok riječima uvodimo učenike u problem dodira pravca i krivulje drugog reda, možemo istovremeno kroz nekoliko koraka doći do prikaza kao na slici 4. Pomoću klizača lako mijenjamo nagib i odsječak pravca, ali i jednadžbu elipse. Štoviše, možemo trenutno promijeniti elipsu u bilo koju drugu krivulju drugog reda. Najsloženije što se javlja jest upisivanje teksta zapisa diskriminante i promjenjive vrijednosti. Alatom za *Umetanje teksta* kliknemo na crtaću plohu i u otvoreni dijaloški okvir trebamo, uz uključenje LaTeX formule, upisati:

"k^2a^2+b^2-l^2 = " + Diskriminanta.

Ovdje je *Diskriminanta* prethodno izračunat i tako nazvan broj kroz *polje za unos*. Dodavanjem znaka plus i imena iza navodnika dodaje



Slika 4.

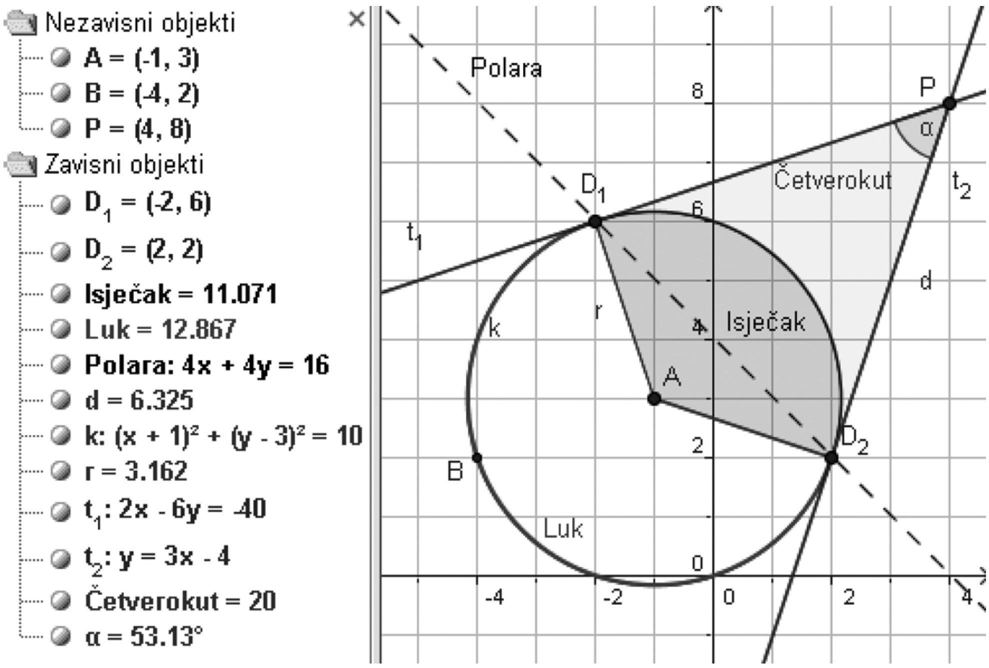
se u geometrijski prozor njegova promjenjiva vrijednost.

6. Kreiranje zadatka

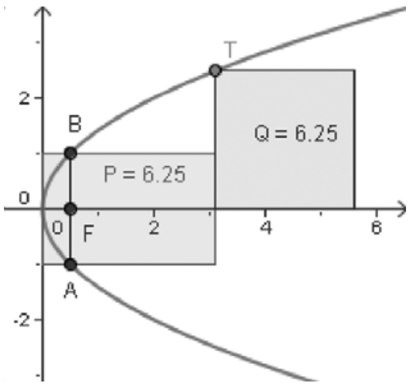
Zadaci iz naših zbirki smješteni su u kvadratu što ga otprilike određuju vrhovi $(\pm 10, \pm 10)$ koordinatnog sustava. I nema tu nekog prevelikog izbora krivulja drugog reda takvih da su, npr., sjecišta s nekim "zgodnim" pravcem cjelobrojna rješenja ili da tangente iz neke točke opet imaju jednadžbe s, kako se to ponekad kaže, "lijepim brojevima". Zbog toga u različitim zbirkama nalazimo iste zadatke ili zadatke s malim varijacijama. Uz malu skicu na papiru lako možemo kreirati neki zadatak, ali nikada nećemo tako brzo i pouzdano dobiti takvo mnoštvo podataka na papiru koliko ih možemo dobiti u *GeoGebri*. Na slici 5. dana su tri nezavisna objekta: točke A i B koje određuju kružnicu i točka P izvan kružnice. Uporabom alata iz alatne trake lako se i brzo konstruiraju: tangente, kut između tangenata, sjecišta (dirališta) tangenata i kružnice, luk i isječak kružnice što ga određuju ta dirališta, četverokut što ga određuje točka P, dirališta i središte kružnice. Algebarske jednadžbe ili veličine tih objekata vidimo u algebarskom prozoru. Neki od tih podataka mogu biti zadani, a drugi traženi elementi zadatka. Uz malo mašte tu se može izvući mnoštvo zadataka. Ali *GeoGebra* nam pruža više od toga, jer nezavisne elemente potezom miša razvlačimo po čvorovima koordinatne mreže (*Prikaz* > *Koordinatna mreža* i *Odrednice* > *Vezivanje točke na mrežu* > *uključeno*).

7. Nedostatak, suvišak i jednakost

Poznato nam je grčko podrijetlo riječi elipsa, hiperbola i parabola. To je uvijek bilo lakše opisati nego prikazati. U *GeoGebri* ne bismo trebali imati većih poteškoća kod istraživanja zanimljivog svojstva čunjosječnica. Neka je $2p$ parametar konike i T točka na njoj. U koordinatnom sustavu nacrtajmo pravokutnik duljine jedne stranice $2p$, i duljine druge stranice jednake apscisi točke T. Nacrtajmo i kvadrat stranice koja odgovara ordinati točke T. Potrebno je usporediti površinu kvadrata s površinom pravokutnika. Krenimo u konstrukciju počevši od parabole (slika 6).



Slika 5.



Slika 6.

Cijelu konstrukciju možemo izvesti kroz *polje za unos*:

c: $y^2 = 2x$;

T = Točka[c] — daje točku na paraboli; pomaknite je iz tjemena!;

F = Žarište[c];

a = Okomica[F,xOs] — daje okomicu kroz žarište na os parabole;

Sjecište[a,c] — daje sjecišta pravca a i parabole c, recimo točke A i B;

p = Udaljenost[F,A] — daje vrijednost poluparametra parabole. Vrijednost parametra može se dobiti i naredbom *Parametar*, ali on se odnosi samo na parabolu, pa naša konstrukcija ne bi funkcionirala ako parabolu zamijenimo elipsom ili hiperbolom;

P = Mnogokut[(0, -p), (x(T), -p), (x(T), p), (0, p)] — crta pravokutnik;

Q = Mnogokut[(x(T), 0), (x(T) + y(T), 0), (x(T) + y(T), y(T)), (x(T), y(T))] — crta kvadrat.

Naredbom *Uređivanje svojstva* mogu se ukloniti suvišne oznake stranica, a prikazati oznaka za površinu mnogokuta i njezinu vrijednost. Pomičite točku T i uvjerite se da za parabolu uvijek vrijedi jednakost tih površina. Dvostrukim klikom miša na jednadžbu parabole u algebarskom prozoru možete mijenjati samu parabolu, da se uvjerite da jednakost vrijedi za svaku parabolu.

Desnim klikom miša kliknite na parabolu ili njezinu jednadžbu i izaberite naredbu *Redefiniranje*. U dijaloško polje upišite jednadžbu elipse s lijevim tjemenom u ishodištu koordinatnog sustava. Na primjer:

$$(x-4)^2/16 + y^2/9 = 1.$$

Sada je kvadrat uvijek manje površine nego pravokutnik. Dvostrukim klikom na jednadžbu elipse lako je promijenimo u hiperbolu:

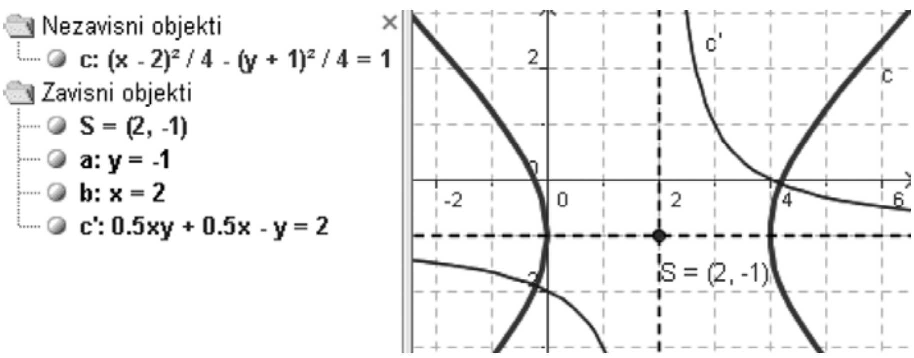
$$(x+4)^2/16 - y^2/9 = 1.$$

Kod nje je kvadrat uvijek veće površine od pravokutnika, bez obzira na položaj točke T.

8. Do jednadžbi povlačenjem i zakretanjem

GeoGebra nam omogućuje da do jednadžbe translatirane konike dođemo drugačije. Za primjer upišimo jednadžbu jednakostranične hiperbole u *polje za unos*. Zapis može biti i ovakav:

$$x\ \ x/4 - y\ \ y/4 = 1$$



Slika 7.

ili

$$x * x/4 - y * y/4 = 1.$$

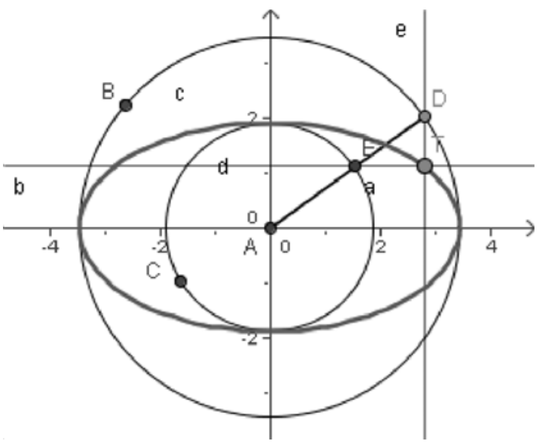
Napomena: *xx* Geogebra shvaća kao novu varijablu. Radi lakšeg promatranja nacrtajmo osi i središte hiperbole, naredbama **Osi[c]** i **S = Središte[c]**. Sada alatom *Pomicanje* povlačimo krivulju po koordinatnom sustavu i uspoređujmo jednadžbu hiperbole s koordinatama središta *S*. Prethodno, ako je potrebno, desnim klikom miša podesimo da jednadžba bude zapisana u obliku:

$$(x - m)^2/a^2 - (y - n)^2/b^2 = 1.$$

Isto tako, graf krivulje mogli bismo zakretati oko njegovog središta alatom *Vrtnja oko točke*. Na slici 7 je prikazana hiperbola rotirana oko svog središta za kut od točno 45°. To je postignuto naredbom **c'=Rotacija[c, 45°, A]**. Dobiveni graf ima jednadžbu $0.5xy + 0.5x - y = 2$, što lako transformiramo u $y = \dfrac{x}{x-2}$. Na ovaj način moguće je ukazati da je kod racionalnih funkcija koje se kasnije uče često riječ o hiperbolama.

9. Geometrijsko mjesto točaka

Naredba *Lokus* čini računalne programe dinamične geometrije jakim i posebnim alatima. Omogućuje nam konstrukciju krivulja drugog reda, ali i drugih krivulja ravnine bez njihovih jednadžbi. Moguće ih je konstruirati po samoj definiciji ili svojstvu i pritom se uvijek oživi uobičajene fraza u definicijama "geometrijsko mjesto točaka". Svaku od krivulja drugog reda moguće je konstruirati na više načina. Parabolu smo tako konstruirali u prošlom broju kao geometrijsko mjesto točaka jednako udaljeno od jednog pravca i točke koja ne pripada tom pravcu. Neka vaš domaći uradak bude pomoću naredbe *Lokus* konstruirati elipsu koja je afina slika kružnice (slika 8) i obrazložiti konstrukciju.



Slika 8.

Pomoć. Kada biste na svom računalu imali datoteku afina.ggb (slika 8), riješili biste svoje moguće dileme. Dovoljno bi bilo da u izborniku *Prikaz* otvorite *Opis konstrukcije*. Kako nemate tu datoteku, evo slike tog prozora.


Opis konstrukcije

Datoteka Prikaz Pomoć

Br.	Ime	Naredba
1	točka A	Sjecište[xOs, yOs]
2	točka B	
3	kružnica c	Kružnica[A, B]
4	točka C	
5	kružnica d	Kružnica[A, C]
6	točka D	Točka[c]
7	dužina a	Dužina[A, D]
8	točka E	Sjecište[d, a, 1]
9	pravac b	Okomica[E, yOs]
10	pravac e	Okomica[D, b]
11	točka T	Sjecište[b, e]
12	Lokus loc1	Lokus[T, D]

12 / 12

Slika 9.

10. Ubrzani vodič

Ako spadate u one kojima je teško čitati dugačke upute u računalne programe, onda će vam se možda više svidjeti vodič *Quickstrat*, koji je ljetos kolegica Ela Rac Marinić Kragić prevela na hrvatski jezik (`http://www.geogebra.at/help/geogebraquickstart_hr.pdf`). Možda dobijete dovoljno ubrzanje da budete ispred opisa *Geogebre* u sljedećem broju *Miš*-a.