Formula za udaljenost
težišta trokuta i središta opisane mu kružnice te njezina primjena

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

U matematičkoj literaturi koja se odnosi na međusobne udaljenosti četiriju karakterističnih točaka trokuta nalazi se i jednakost:

$$|OG|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (1)$$

gdje su točke O i G središte opisane kružnice trokuta ABC, odnosno težište tog trokuta, dok su a, b i c duljine stranica tog trokuta, a R polumjer opisane kružnice. U [1], str. 439 nalazi se dokaz jednakosti (1) u kojemu se koristi Eulerov[1] teorem da je:

$$|OG| : |GH| = 1 : 2 \qquad (2)$$

gdje je točka H ortocentar trokuta ABC.

Budući da su točke O, G i H kolinearne (pripadaju Eulerovu pravcu), vrijedi:

$$|GH| = \frac{2}{3}|OH|. \qquad (3)$$

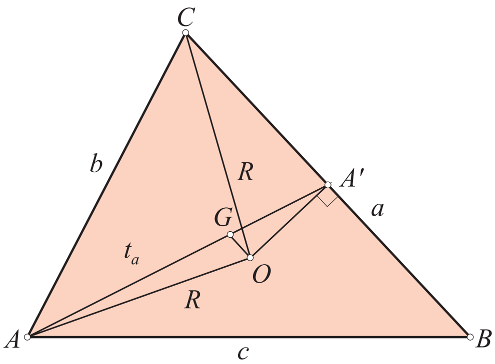
Dalje se koristi jednakost:

$$|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \qquad (4)$$

čija se dva dokaza također nalaze u [1], str. 435–437.

Mi ćemo sada dati još jedan dokaz jednakosti (1) u kojemu nećemo koristiti jednakosti (2), (3) i (4).

Dokaz: Neka je točka A' polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC (slika 1).



Slika 1.

Na osnovu Stewartova[2] teorema primijenjena na trokut OAA', gdje $G \in AA'$, vrijedi:

$$|OG|^2 \cdot |AA'| = |OA'|^2 \cdot |AG| + |OA|^2 \cdot |A'G| - |AA'| \cdot |AG| \cdot |A'G|. \qquad (5)$$

Vodeći računa da je $|OA| = R$, $|AA'| = t_a$, $|A'G| = \frac{1}{3}t_a$, $|AG| = \frac{2}{3}t_a$, te

$$|OA'|^2 = |OC|^2 - |A'C|^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

dobivamo iz (5):

$$|OG|^2 \cdot t_a = \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}R^2 t_a - \frac{2}{3}t_a \cdot \frac{1}{3}t_a \cdot t_a,$$

prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, asefket@pmf.unsa.ba

[1] Leonard Euler (1707. – 1783.), švicarski matematičar

[2] Matthew Stewart (1717. – 1785.), škotski matematičar

a odavde

$$|OG|^2 = \frac{2}{3}R^2 - \frac{a^2}{6} + \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9}t_a^2,$$

odnosno zbog poznatog obrasca

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

dobivamo

$$|OG|^2 = R^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{2}{9} \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

tj. $|OG|^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{6} - \dfrac{1}{9}(b^2 + c^2) + \dfrac{1}{18}a^2,$

odnosno

$$|OG|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

a ovo je (1). ■

Nadalje, u [1], str. 33–35 dokazana je jedna nejednakost trokuta koja glasi:

$$\frac{1}{2} < \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1 \qquad (6)$$

gdje su h_a, h_b, h_c duljine visina, a a, b, c duljine stranica trokuta ABC.

Dokazat ćemo sada da za desnu stranu ove nejednakosti (6) vrijedi bolja (jača) nejednakost koja glasi:

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} \le \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (7)$$

jer je $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Primijetimo da se ta konstanta ne može više smanjiti jer za jednakostranični trokut nejednakost upravo postaje jednakost. Kažemo da je $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ najbolja moguća gornja međa tog izraza.

Dokaz: Poći ćemo od poznate nejednakosti:

$$(a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca)$$
$$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \ge 0\right).$$

Imamo

$$(a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca)$$
$$= 3abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3abc\left(\frac{h_a}{2P} + \frac{h_b}{2P} + \frac{h_c}{2P}\right)$$
$$= \frac{3abc}{2P}(h_a + h_b + h_c) = \frac{3 \cdot 4RP}{2P}(h_a + h_b + h_c),$$

tj.

$$(a + b + c)^2 \ge 6R(h_a + h_b + h_c). \qquad (8)$$

Iz (1) zbog $|OG|^2 \ge 0$ slijedi:

$$R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \ge 0,$$

tj.

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2. \qquad (9)$$

Koristeći opet poznatu nejednakost:

$$(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \ge 0\right)$$

imamo zbog (9): $(a + b + c)^2 \le 27R^2$, tj.

$$a + b + c \le 3\sqrt{3}R. \qquad (10)$$

Sada iz (8) i (10) dobivamo:

$$(a + b + c)^2 \ge 6 \cdot \frac{a + b + c}{3\sqrt{3}}(h_a + h_b + h_c)$$
$$\Leftrightarrow a + b + c \ge \frac{2}{\sqrt{3}}(h_a + h_b + h_c)$$
$$\Leftrightarrow \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} \le \frac{\sqrt{3}}{2},$$

a ovo je nejednakost (7). ■

LITERATURA

1/ Š Arslanagić (2005.): *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo.