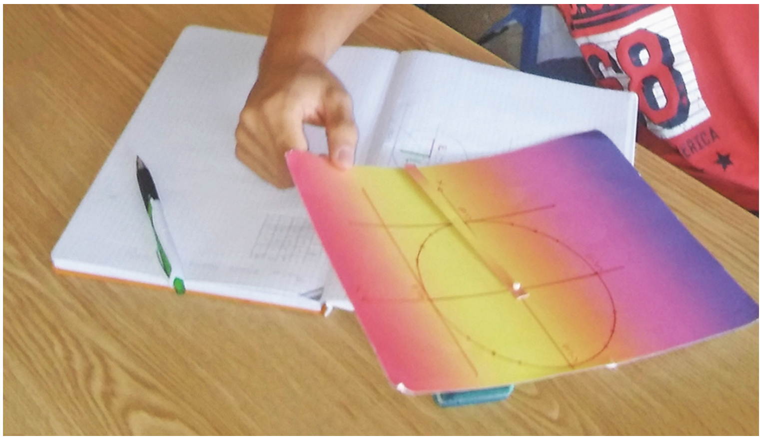
Kreativnim modelom do vizualizacije

Zvjezdana Jurić i
Snježana Bošnjak, Osijek



Izradom i uporabom jednostavnih modela u nastavi kao nastavnih sredstava možemo kod učenika postići lakše usvajanje nastavnog sadržaja i razumijevanje apstraktnih matematičkih pojmova i dokaza (Stylianou 2010.).

Olakšajmo grafičko promišljanje kod učenika

Vizualizacija u nastavi matematike je predmet raznih istraživanja. Istraživanja (Arcavi, 2003; Hanna i Sidoli, 2007, Rösken i Rolka, 2006) su pokazala da veliku ulogu u tome imaju nastavnici koji svojim pristupom u razumijevanju matematičkog problema mogu na ovaj način pomoći učenicima usvajanje matematičkih pojmova, a kasnije i primjeni rješavanja svakodnevnih životnih situacija vizualizacijom problema. Mnoga istraživanja pokazuju da nastavnici koji ističu vizualizaciju u matematici i koriste modele u obradi i usvajanju matematičkih pojmova postižu bolje rezultate kod svojih učenika, ne samo u osnovnoj školi nego i u srednjoj školi, i kasnije tijekom studija (npr. Bishop, 1989.; Boaler, Chen, Williams i Cordero, 2016.).

Razvoj konceptualnog i proceduralnog znanja uporabom modela

Matematička kompetencija temelji se na razvoju konceptualnog i proceduralnog znanja. Konceptualno znanje zasniva se na razumijevanju matematičkih pojmova, operacija i odnosa među njima. Dok proceduralno znanje predstavlja vještine, strategije i algoritme koji omogućavaju brzo i učinkovito rješavanje problema. Ako se kod učenika postigne viša razina konceptualnog znanja, ona će poboljšati razinu proceduralnog znanja. Da bi se to postiglo, učenik treba pri usvajanju apstraktnog pojma, tj. novog koncepta biti aktivan u procesu učenja.

Nastavnik može dovesti učenika do višeg stupnja konceptualnog znanja primjenom modela za vizualizaciju i usvajanje zakonitosti u raznim matema-

Zvjezdana Jurić, prof. matematike i fizike, savjetnik, Ugostiteljsko-turistička škola, Osijek, zjuri50@gmail.com
Snježana Bošnjak, prof. matematike i fizike, savjetnik, Elektrotehnička i prometna škola, Osijek, bosnjak.snjezana@gmail.com

tičkim područjima kao npr. kod linearne i kvadratne funkcije, geometrije prostora, svojstava trigonometrijskih funkcija na brojevnoj kružnici, te kod krivulja drugog reda.

Učenici često rješavaju zadatke iz algebre i geometrije mehanički, bez razumijevanja i ne vide njihovu primjenu izvan matematike. Nastavnikovo znanje i iskustvo mogu doprinijeti praktičnom razumijevanju nastavnog sadržaja. Jedan od učinkovitih načina poučavanja matematičkih koncepata jest njihovom vizualizacijom. Uporaba modela česta je u osnovnoškolskom obrazovanju. Primjerice, cijeli brojevi mogu se predočiti s pomoću termometra i temperatura. Zatim razlomke možemo predočiti s pomoću dijelova kruga ili pravokutnika, a također s pomoću tih modela možemo prikazati i operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja razlomaka. Učenici u osnovnoj školi rješavaju linearne jednadžbe uvođenjem modela vage i proučavanjem njezine ravnoteže. Učenici primjenom modela uočavaju veze i zakonitosti, promišljaju o definiciji i svojstvima. Na taj način pridonosi se razvoju deduktivnog rasuđivanja. Vizualizacija matematike nije važna samo za učenike kojima je shvaćanje matematičkih pojmova teško i problematično nego je vizualizacija važna i korisna za sve učenike i na svim razinama poučavanja. Nekako se stječe dojam da se u srednjoj školi učenicima odjednom prestaje matematika poučavati slikovito i uporabom modela jer se smatra da su te metode pogodne samo za niže razine razumijevanja. Vizualne aktivnosti poboljšavaju kod učenika razumijevanje nastavnih sadržaja u matematici i na višim kognitivnim razinama. Nastavnik takvim metodama nastavu učini pristupačnom i zanimljivom. Također nastavnik svojim primjerom pri izradi modela za vizualizaciju pojmova potiče učenika na kreativnost i inovativnost. Primjeri koji slijede mogu pomoći vizualizaciji u srednjoj školi.

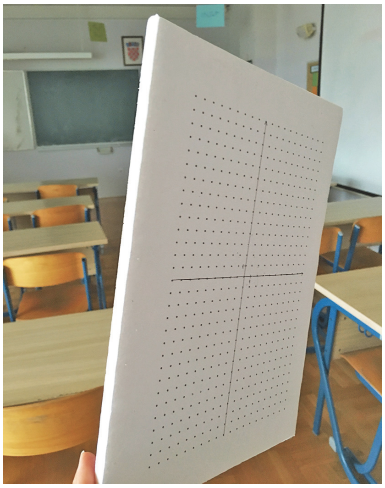
Primjeri modela

Opisat ćemo nekoliko primjera modela koje smo koristile u nastavi. Cilj nam je pokazati prednosti grafičkog prikaza kod usvajanja novih pojmova i razvoja konceptualnog znanja, što posljedično pridonosi učinkovitijoj primjeni odgovarajućeg proceduralnog znanja.

1. Geoploča

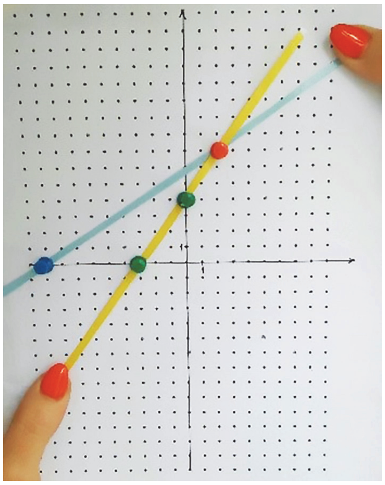
Nastavni sadržaj: Koordinatni sustav i pojmovi vezani uz koordinatni sustav (unošenje točke, preslikavanje točke ili likova, planimetrija, linearna i afina funkcija, grafičko rješavanje sustava jednadžbi), zahtijevaju rad s koordinatnom mrežom.

Model koji se može koristiti: U objašnjavanju matematičkih pojmova vezanih uz pravokutan koordinatni sustav u ravnini, opseg, površinu mnogokuta možemo koristiti geoploču. Geoploča je ploča (drvena ili plastična) s čavlićima koji su raspoređeni u kvadratnu mrežu. Često je izrada geoploče zahtjevan proces, ali do nje možemo doći vrlo lako (model geoploče s pomoću stiropora na koji učvrstimo točkasti papir koji predstavlja točkastu mrežu). Učenici su umjesto čavlića na izrađenoj geoploči od stiropora koristili pribadače ubadajući ih u točkastu mrežu. Na taj je način model geoploče pojednostavljen za izradu. Upotrebom geoploče učenici će lakše vizualizirati i povezati apstraktne matematičke pojmove.



Način korištenja modela: Korištenje geoploče pri obradi nastavne jedinice "Graf linearne funkcije – uvjet paralelnosti i okomitosti pravaca" kod učenika dovodi do vizualizacije i olakšava razumijevanje. Svaki učenik koristi svoju geoploču, pravce od kartona (papira) i "točke" koje predstavljaju pribadače s plastičnim glavicama.

Što se modelom želi postići: Učenici vrlo lako sami zaključuju i otkrivaju zakonitosti vezane uz položaj pravaca i na taj način postaju aktivni sudionici u nastavnom procesu. Takav način rada naročito je primjenjiv u radu s učenicima po prilagođenom programu. Važna je i činjenica da se uporabom geoploče dobije na uštedi vremena, a nastava učenicima bude zanimljivija i dinamičnija.

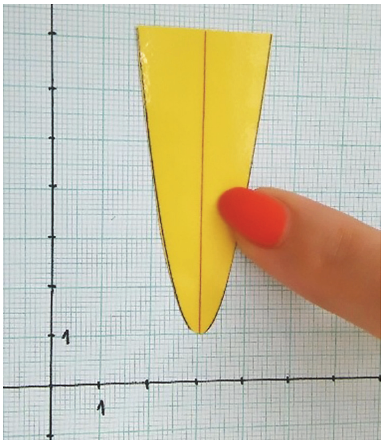


2. Modeli parabole

Nastavni sadržaj: Kvadratna funkcija se obrađuje u drugom razredu srednje škole. Učenici se upoznaju s kvadratnom funkcijom, njezinim grafom i svojstvima.

Model koji se može koristiti: Za cjelinu Kvadratna funkcija i njezin graf, učenici su trebali izraditi od kartona ili debljeg papira parabole (svaka parabola druge boje) u mjerilu 1:1 cm (primjerice $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = 4x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2$).

Način korištenja modela: Učenici prepoznaju model pojedine parabole, translatiraju model parabole po pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini i uočavaju svojstva funkcije na danom modelu, povezuju opći oblik kvadratne funkcije s tjemenim oblikom funkcije. Smještanjem parabole u pravokutni koordinatni sustav u ravnini učenik može odrediti kvadratnu funkciju.



Što se modelom želi postići: Korištenjem modela parabola na nastavi učenici su vrlo lako primjenjivali osnovna znanja o translaciji kvadratne funkcije duž x i y osi, zaključivali o položaju parabole, njezinim svojstvima (okrenutost parabole, nul-točke, sjecište s osi ordinata, tjeme, ekstrem, rast/pad).

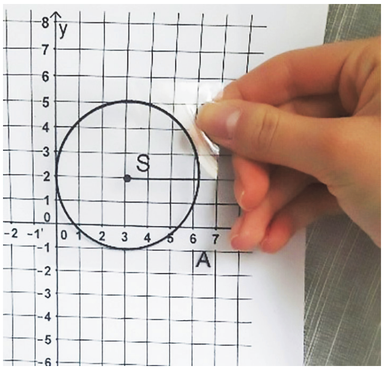
3. Model kružnice na grafoprozirnici

Nastavni sadržaj: Kružnica u koordinatnom sustavu može biti u nekim posebnim položajima. Neki od tih posebnih položaja kružnice su: kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, središte kružnice na koordinatnim osima, kružnica dodiruje jednu od koordinatnih osi te kružnica dodiruje obje koordinatne osi.

Model koji se može koristiti: Za učinkovit način poučavanja i otkrivanja posebnih položaja kružnice u koordinatnom sustavu može poslužiti model kružnice na grafoprozirnici s označenim središtem te pravokutni koordinatni sustav u ravnini.

Način korištenja modela: Nastavnik navodi učenike da kružnicu na grafoprozirnici translatiraju po koordinatnom sustavu i postave ju u jednom od tih posebnih položaja npr. središte kružnice na osi apscisa.

Što se modelom želi postići: Nakon postavljanja kružnice u koordinatnom sustavu kojem je središte kružnice na osi apscisa, učenici trebaju odgonetnuti i zapisati jednadžbu tako postavljene kružnice. Translatirati središte kružnice po osi apscisa i zapisivati jednadžbe tako dobivenih kružnica. Nakon uspoređivanja nekoliko jednadžbi kružnica učenici mogu lako zaključiti kako zapisati opći oblik jednadžbe kružnice za taj posebni položaj.

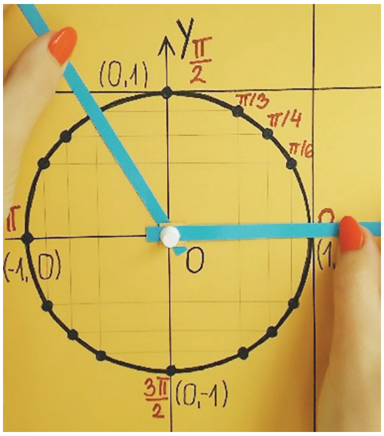


4. Kartonski model trigonometrijske kružnice

Nastavni sadržaj: Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta u pravokutnom trokutu definirane su kao omjer duljina odgovarajućih stranica. S pomoću jedinične kružnice definiraju se trigonometrijske funkcije bilo kojeg kuta.

Model koji se može koristiti: Za vizualizaciju apstraktnih pojmova u vezi trigonometrijskih funkcija na jediničnoj kružnici učenicima može poslužiti kartonski model slijepe trigonometrijske kružnice. Krakovi kuta od kartona rotiraju oko ishodišta koordinatnog sustava učvršćeni pribadačom.

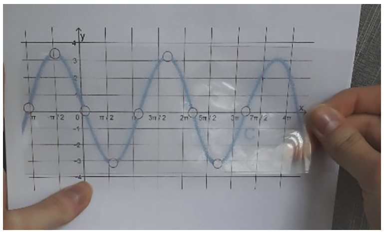
Način korištenja modela: Učenici rotiraju drugi krak kuta oko ishodišta koordinatnog sustava po kvadrantima i određuju npr. predznak vrijednosti trigonometrijskih funkcija ovisno o tome u kojem se kvadrantu nalazi točka $E(t)$ trigonometrijske kružnice.



Što se modelom želi postići: Ovim modelom trigonometrijske kružnice učenicima se mogu vizualizirati pozitivno i negativno orijentirani kut, pojam glavne mjere kuta, definicije trigonometrijskih funkcija, predznaci i vrijednosti trigonometrijskih funkcija, svojstva trigonometrijskih funkcija, ali i trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.

5. Model grafova trigonometrijskih funkcija na grafoprozirnici

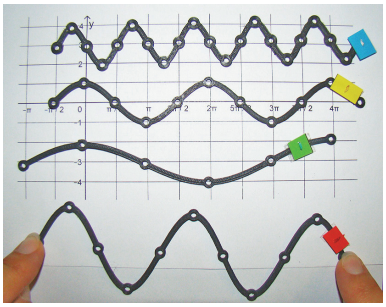
Nastavni sadržaj: Svojstva trigonometrijskih funkcija na jediničnoj kružnici mogu se povezati sa svojstvima grafova pojedinih trigonometrijskih funkcija.



Model koji se može koristiti: Nakon što učenici nauče osnovna svojstva grafova funkcija $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \cos x$ za daljnje proučavanje složenijih grafova funkcija mogu se koristiti modeli trigonometrijskih funkcija na grafoprozirnicama i koordinatni sustav. Za proučavanje amplitude, perioda funkcije i faznog pomaka dovoljno je napraviti modele funkcija $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2\sin x$

i $f(x) = \sin 2x$ na grafoprozirnici prikazanih različitim bojama. Naši učenici su iste modele izradili 3D printerom.

Način korištenja modela: Učenici translatiraju model pojedine trigonometrijske funkcije po koordinatnom sustavu i određuju formulu koja opisuje novonastalu funkciju. Također se grafoprozirnice mogu postavljati jedna na drugu i uspoređivati svojstva jedne i druge trigonometrijske funkcije.



Što se modelom želi postići: Ovim se modelom kod učenika razvija grafičko promišljanje i to na vlastitom iskustvu sa samim modelom. Učenici s pomoću modela mogu uočiti utjecaj koeficijenata a, b, c i d na grafove trigonometrijskih funkcija $f(x) = a\sin(bx+c)+d$ i $f(x) = a\cos(bx+c)+d$ kao i primjenu formule redukcije i svođenja na prvi kvadrant.

Zaključak

Uporaba modela rijetka je u srednjoškolskom obrazovanju jer se smatra da učenici imaju razvijenije kognitivne sposobnosti, te da se relativno lako može postići tražena razina apstrakcije. No uporaba modela opravdana je i u srednjoškolskoj matematici. Uporaba modela kod učenika razvija grafičko promišljanje i na taj način učenik povezuje teoriju i zakonitosti u matematičkim problemima. Takav način poučavanja kod učenika ostavlja trajno znanje, a nastavnicima čini poučavanje lakšim i razumljivijim za učenike.

Ovdje smo prikazale dio modela koji se vrlo lako daju izraditi, a čija je namjena prvenstveno kako učeniku olakšati promišljanje, usvajanje pojmova i uočavanje zakonitosti u određenom matematičkom pojmu. Izrada modela potiče i nastavnika i učenike na inovativnost i kreativnost, a samim time nastavu čini dinamičnijom i učenicima razumljivijom.

LITERATURA

1/ A. Arcavi (2003.): The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.

2/ A. Bishop (1989.): Review of research in visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7–16.

3/ I. Biza, E. Nardi, T. Zachariades (2009.): Teacher Beliefs and the Didactic Contract on Visualisation, *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 31–36.

4/ J. Boaler, L. Chen, C. Williams & M. Cordero (2016.): Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning, *Journal of Applied & Computational Mathematics*, 5(5),325, doi: 10.4172/2168-9679.1000325.

5/ I. Čavlović, M. Lapaine (2005.): *Matematika 3, udžbenik za 3. razred četverogodišnje strukovne škole*, Školska knjiga, Zagreb.

6/ V. Erceg (2010.): *Gospodarska matematika 1, udžbenik i zbirka za 1. razred srednje ugostiteljske škole*, HoReBa d.o.o., Pula.

7/ G. Hanna, N. C. Sidoli, (2007.): Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives, *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 73–78.

8/ B. Rösken, K. Rolka (2006.): A picture is worth a 1000 words – the role of visualization in mathematics learning u J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (ur.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (sv. 4, str. 441–448), Prague, Czech Republic: PME.

9/ D. A. Stylianou (2010.): Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325–343.

10/ S. Varošanec (2009.): *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola*, Element, Zagreb.

11/ V. Vlahović-Štetić, V. Vizek Vidović (1998.): *Kladim se da možeš, psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*, Korak po korak, Zagreb.