

Projekt MERIA

i istraživački usmjerena nastava matematike

Željka Milin Šipuš, Eva Špalj,
Matija Bašić i Sanja Antoliš,
Zagreb

*Učenike primamo kao upitnike, a
otpuštamo kao točke.*

(Neil Postman)



Uvod

U kolovozu 2019. uspješno je završen trogodišnji Erasmus+ projekt **Mathematics education – relevant, interesting and applicable (MERIA)**. Nositelj projekta bio je PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, uz partnere Fakultet elektrotehnike i računarstva i Fakultet organizacije i informatike Sveučilišta u Zagrebu, te University of Copenhagen iz Danske, University of Utrecht – Freudenthal Institute iz Nizozemske, University of Ljubljana i National Education Institute iz Slovenije, zatim srednje škole XV. gimnazija iz Zagreba, Gimnazija Vordingborg iz Danske, te udruge Hrvatsko matematičko društvo i Društvo nastavnika matematike iz Danske. Vrlo motiviran, entuzijastičan i stručan tim pažljivo je odradio postavljene si zahtjevne ciljeve koji su se temeljno bavili promišljanjem i promicanjem smis-

lenog i kvalitetnog matematičkog srednjoškolskog obrazovanja.

U obrazovanju općenito, a posebno u matematičkom obrazovanju koje je dio obaveznog obrazovanja diljem svijeta, često se postavljaju pitanja kako ga učiniti "boljim" u mnogim aspektima. Je li ovo zaista vrijeme, kako povjesničar i sociolog Yuval Noah Harari (2017.) konstatira, u kojem "ne znamo čemu poučavati našu djecu", odnosno, je li zaista naše "obrazovanje neprikladno za ljudske potrebe" kao što kaže matematičar Yves Chevallard (2015.)?

No, bez obzira na te stavove, bez obzira na postavljene ciljeve obrazovanja, posebno srednjoškolskog, i bez obzira je li obrazovni sustav "tradicionalan" ili ne, danas je mnogo više nego prije važno učenike učiti kako graditi novo znanje iz svojeg vlastitog postojećeg znanja. Ideja "istraživanja i oponašanja rada matematičara" nije nova, prim-

prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, milin@math.hr

Eva Špalj, prof. savjetnik, XV. gimnazija, Zagreb, espalj@mioc.hr

doc. dr. sc. Matija Bašić, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, mbasic@math.hr

Sanja Antoliš, prof. savjetnik, XV. gimnazija, Zagreb, santolis@mioc.hr

jerice, i na našim prostorima ju je zagovarao metodičar matematike, profesor Ignacije Smolec (1916. – 2005.), koji je smatrao da “škola valja osposobiti za istraživanje, za djelovanje” (Dakić, 2005.). Danas, ponajviše zbog brzog rasta ljudskog znanja, ideja istraživački usmjerene nastave matematike naglašeno je aktualna i prisutna u matematičkim kurikulumima diljem svijeta. Propitivanje njezinih mogućnosti i dosega, odnosno osmišljavanje materijala za njezino izvođenje, bili su glavni pokretači projekta MERIA.

Osim ideje smislenog promoviranja istraživački usmjerene nastave matematike projekt MERIA imao je za cilj i ojačati veze između srednjoškolskog i sveučilišnog matematičkog obrazovanja te omogućiti priliku za profesionalni razvoj nastavnika matematike u partnerskim zemljama (a moguće i šire). Taj je cilj ostvaren kroz zajednički rad srednjoškolskih i sveučilišnih nastavnika partnerskih zemalja na osmišljavanju materijala za istraživački usmjerenu nastavu matematike, zatim na analiziranju uvjeta i ograničenja za njezino uvođenje, kao i analiziranju nastave i unapređenju materijala.

Oснаživanje veza srednjoškolskih i sveučilišnih institucija te između srednjoškolskog i sveučilišnog matematičkog obrazovanja promicao je još prije više od 100 godina i Felix Klein (1849. – 1925), njemački matematičar i matematički edukator. Ukazivao je na problem “dvostrukog diskontinuiteta” u obrazovanju nastavnika. Prvi diskontinuitet u njihovom obrazovanju događa se dolaskom na fakultet kada budući nastavnici počinju učiti sveučilišnu matematiku koja je izrazito drukčije strukturirana od srednjoškolske, dok se drugi događa kad se vrte natrag u školu. I danas je vrlo aktualno njegovo pitanje “U kojoj mjeri napredno sveučilišno iskustvo omogućuje budućim nastavnicima pristupiti

srednjoškolskoj matematici na dublji i samostalniji način?”. Klein je kritizirao postojeće materijale za nastavnike jer “ne odražavaju didaktičku dimenziju nastave te posebno zanemaruju potrebu za intuitivnim pristupima”. Zagovarao je “epistemološko razumijevanje *elemenata* kao podlogu za razumijevanje povezanosti i koherentnosti grana i specijalnosti matematike” (Weigand, McCallum, Menghini, Neubrand i Schubring, 2019.). Tim se principima u zajedničkoj suradnji vodio i projekt MERIA. Zajednički su osmišljeni scenariji uz analizu matematičkog sadržaja i didaktičkih varijabli te su provedeni brojni intervjui s uključenim nastavnicima kako bi se dobilo što više uvida u moguća ograničenja i prepreke u odmaku od frontalne nastave. Imajući sve to u vidu, projekt MERIA nastojao je odgovoriti na neke izazove kroz zajednički rad svih članova projektnog tima s jednostavnim zajedničkim ciljem – smislenija, relevantnija i primjenjivija nastava matematike za sve učenike.

Prednosti i ograničenja istraživački usmjerene nastave

Istraživački usmjerena nastava podrazumijeva samostalnu aktivnost učenika (barem u jednom dijelu sata) orijentiranu na rješavanje problema. Pritom učenik oponaša ponašanje znanstvenika postavljanjem dodatnih pitanja, ispitivanjem posebnih slučajeva i traženjem uzoraka, postavljanjem, opovrgavanjem i dokazivanjem hipoteza itd. Takav način rada zahtijeva velik angažman učenika, a kao rezultat kognitivne aktivacije očekujemo postizanje boljeg razumijevanja proučene problematike i dugotrajnijeg pamćenja iskustva koje je tijekom aktivnosti stečeno. Ipak, bilo bi vrlo pojednostavljeno tvrditi da istraživački usmjerena nastava pozitivno utječe na rezultate na standardiziranim testovima. Provedena istraživanja pokazuju da učenici koji su izloženi istraživačkoj nastavi imaju veću motivaciju i interes za matematiku (Bruder i Prescott, 2013.) te da takav tip nastave pozitivno utječe na učenike s nižim razinama postignuća, a da pritom ne utječe negativno na učenike s dobrim rezultatima (Kogan i Laursen, 2014.).



Priprema i provedba istraživačkih aktivnosti zahtijeva vrijeme za koje na prvi pogled nastavnik može imati osjećaj da je potrebno "oduzeti" od drugih aktivnosti ili sadržaja u već natranom planu i programu. Iskustva s nastavnicima u projektu MERIA pokazuju da su nastavnici voljni uložiti svoje vrijeme za pripremu i odvojiti dio satnice za inovativne satove ako su ti satovi podržani kvalitetnim materijalima, a nastavnici prethodno uvjereni da će sat biti produktivan.

Naravno, uvjerenje o potencijalnom ishodu sata je subjektivno i spekulativno te se kao bitni faktori nameću autoritet koji nastavnik prepoznaje iza dizajna nastavnih materijala i pozitivna iskustva drugih kolega koji su proveli isti sat u sličnom kontekstu. Osim usmjerenosti na rješavanje problema tipična karakteristika istraživačke nastave matematike je promjena uloga učenika i nastavnika. Učenici prije svega moraju preuzeti odgovornost za svoje učenje, a nastavnik se iz pozicije predavača pomiče u ulogu voditelja ili suradnika. S većim brojem učenika raste broj različitih otkrića i iskustava koja učenici doživljavaju, pa je nastavnik suočen s izazovom kako uspješno pratiti rad učenika i reagirati na nepredvidljive situacije koje se mogu pojaviti, te kako orkestrirati prezentaciju rezultata i na kraju povezati rad učenika s obrazovnim ciljevima koji su za taj sat zacrtani. Teoretski okviri poput teorije didaktičkih situacija ustanovljeni su upravo kako bi pružili potreban jezik za analizu i diskusiju o takvim izazovima. Precizan metodički vokabular omogućava razgovor o očekivanjima, ciljevima, fazama sata, poteškoćama i paradoksima koji se javljaju u odnosu između nastavnika-facilitatora i učenika.

Za nastavnika kojem su mogući načini izvođenja istraživački usmjerene nastave novost i nepoznаница, od velike koristi mogu biti *MERIA Praktični vodič*, te konkretni nastavni materijali objavljeni u obliku *MERIA Scenarija i modula*. Osim samih materijala značajna razina podrške može doći iz zajednice kolega koji zajedno uvode (sustavnu) promjenu u pristupu poučavanju. Dva ili više nastavnika matematike mogu zajedno formulirati ciljeve svojih "eksperimentalnih" nastavnih satova, biti međusobno prisutni na satovima i olakšati praćenje učenika te na kraju zajednički napraviti refleksiju o uspješnosti sata. Nastavnici koji su proveli više MERIA scenarija u istom razredu primijetili su da su učenici s

vremenom uspješno prihvatili nove uloge i u manjoj mjeri tražili direktnu pomoć u rješavanju problema.

Na temelju tih iskustava zaključujemo da se uvođenje istraživački usmjerene nastave odvija postupno, počevši s malim koracima i dugoročnim ciljevima. Možemo utvrditi da nastavnici ovim načinom rada upoznaju svoje učenike na drukčiji način, nerijetko se ugodno iznenade reakcijama inače manje zainteresiranih učenika te prepoznaju korisnost MERIA scenarija u razvoju kritičkog razmišljanja učenika. Konačno, a zapravo i vrlo važno, promišljajući o maturi, nastavnici u završnim intervjuima o utjecaju projekta na njihov rad zaključuju da je njihov nastavni plan u velikoj mjeri podređen maturi, ali je istraživački usmjerena nastava u obliku prezentiranom MERIA scenarijima poravnata sa sadržajima i zahtjevima u zadacima ispita mature.

Teorije matematičkog obrazovanja u projektu MERIA

U izvođenju istraživački usmjerene nastave matematike nastavnik se susreće s mnogim izazovima, primjerice: kako motivirati učenike da krenu s radom, da se pitaju i formuliraju početna matematička pitanja, kako angažirati sve učenike da rade na temelju vlastitog znanja, kako efikasno "držati ruke u džepovima", učenicima pomagati, ali i ne pomagati, kako graditi dalje na temelju učeničkih početnih odgovora koji mogu biti sasvim različiti i



voditi na različite putove, s kojim odgovorima nastavnik može biti zadovoljan, i naravno, kako osigurati da svi učenici nauče “pravu matematiku” u potrebnoj mjeri? Izvođenje istraživački usmjerene nastave i scenariji projekta MERIA poduprti su dvjema relevantnim teorijama matematičkog obrazovanja – nizozemskom teorijom realističnog matematičkog obrazovanja i francuskom teorijom didaktičkih situacija.

Realistično matematičko obrazovanje

Realistično matematičko obrazovanje (engl. *Realistic mathematics education, RME*) je teorija učenja i poučavanja koju je razvio i prvi predstavio Freudenthal Institute u Nizozemskoj. Nizozemski se matematičar Hans Freudenthal (1905. – 1990.) osim matematikom bavio i matematičkim obrazovanjem te je imao veliki utjecaj na razvoj RME. Dva su važna načela na kojima se temelji RME:

1. Matematika je ljudska aktivnost.
2. Smislena je matematika izgrađena na bogatim realnim kontekstima.

Matematika mora biti bliska učenicima i biti relevantna za svakodnevne životne situacije. Međutim, riječ “realistično” ne odnosi se samo na povezanost sa stvarnim svijetom, nego s kontekstom koji je učenicima blizak i smislen, odnosno u kojem učenici neku situaciju mogu predložiti kao suvislu i samostalno u njoj zaključivati. Kontekst može biti iz svakodnevnog života, ali to nije uvijek neophodno.

Matematika može biti vrlo strukturirana, dok RME promovira manje formalan pristup. Izlaganje učenika vrlo formalnoj nastavi matematike naziva se **inverzija**. Umjesto prirodnog tijeka misli koji je doveo do otkrića novog koncepta, učenicima u formalnoj nastavi prvo prikazujemo krajnje rezultate često vrlo dugačkog i zahtjevnog procesa koji je do te matematike doveo. Da bi učenik došao do polaznog problema koji je potaknuo potrebu za tim matematičkim znanjem treba dosta vremena i napornog rada. RME tvrdi da to uopće nije didaktički pristup; naziva ga **anti-didaktičkom inverzijom**.

RME predlaže da nastava matematike bude organizirana kao vođeno (ponovno) otkrivanje, gdje

učenici prolaze sličan proces kao znanstvenici koji su tu matematiku otkrili. Otkrivanje je korak u procesu učenja, a riječ “vođeno” predstavlja nastavno okruženje procesa učenja. Neformalne strategije učenika često se mogu tumačiti kao njihovo predviđanje formalnih procesa. U tom je slučaju postupak ponovnog otkrivanja vođen konceptom **matematizacije**.



U uvodnoj se fazi kroz kontekst uvodi relativno otvoren problem koji je učenicima dohvatljiv da ga mogu sami otkriti ili formulirati. Učenici problemu mogu pristupiti na različite matematičke načine. Slijedi faza horizontalne matematizacije; problem se prevodi na matematički jezik kako bi se raspravilo o situaciji. Učenici identificiraju ili opisuju specifičnu matematiku u općem kontekstu, formuliraju i vizualiziraju problem na različite načine, otkrivaju odnose, pravilnosti i slično. Učenici stvaraju prvi neformalni model.

Faza vertikalne matematizacije je proces reorganizacije u samom matematičkom sustavu pri čemu učenici izgrađuju svoje matematičko znanje. Predstavljaju odnos u obliku formule, dokazuju pravilnosti, prilagođuju model kombiniranjem i integriranjem drugih, jednostavnijih modela, formuliraju matematički model i generaliziraju. Model postaje apstraktniji, općenitiji.

U posljednjoj fazi zaključivanja i refleksije učenici prolaze i analiziraju cijeli proces od početka, integriraju ideje, eksplicitno pokazujući stečene metakognitivne vještine i razmjenjuju svoje zaključke. Nastavnik ih pri tome vodi i ističe glavne točke procesa učenja. U svakoj fazi postoje elementi istraživanja: otkrivanje i/ili formuliranje problema, stvaranje prvog neformalnog modela, apstrahiranje i razmjenjivanje zaključaka.

Teorija didaktičkih situacija

Teorija didaktičkih situacija (TDS) kao temeljnu ideju promiče ideju (nastavnog) “okruženja” i ideju “optimalne strategije” ili “pobjedničke strategije u igri”. Naime, za učenje, nastavnik osmišljava okruženje (franc. *milieu*) koje samo omogućuje učeniku odgovor je li uspješno riješio matematički problem. Ideja TDS-a stvaranje je situacija u kojima učenik rješava probleme koje je znanstvena zajednica već riješila, ali je za učenika rješenje nepoznato pa uočava potrebu za razvijanjem ili konstruiranjem novih matematičkih znanja. Za to je potrebno postaviti primjereno okruženje nastavne situacije. Primjer okruženja je najbolje predstavljen u problemu sa slagalicom:

Učenici u grupama trebaju napraviti uvećane modele prema sljedećem pravilu: dužina koja je u zadanome modelu duljine 4 cm na njihovom modelu treba biti duljine 7 cm. Svaki će učenik napraviti barem jedan dio slagalice. Kada završe, sve dijelove moraju složiti u lik kao u zadanom modelu.

Poučavanje je organizirano u pet faza. Prva se faza naziva **primopredaja**. U ovoj fazi nastavnik učenicima predstavlja problem i daje im uputu za rad. Drugim riječima, nastavnik učenicima prepušta ili predaje okruženje nastavne situacije te dio odgovornosti za rješavanje problema i učenje. Na našem primjeru slagalice to znači da im daje uputu za rad bez direktne daljnje pomoći.



U drugoj fazi, koju nazivamo **djelovanje**, učenici samostalno rade na problemu (kažemo **adidaktički**). U problemu slagalice učenici će se u početku vjerojatno prisjetiti svojeg prethodnog iskustva s matematičkim problemima povećanja veličine i dodavati svakoj stranici 3 cm. Korištenje prethodno usvojenog znanja i iskustva je prirodna početna aktivnost, čak i ako se pokaže pogrešnom.



U fazi **formulacije** učenici predstavljaju ono što su činili u fazi djelovanja; početne ideje, hipoteze ili jednostavno ono što su do sada pokušali učiniti. Presentacija se može organizirati na različite načine, ali nije uvijek dovoljno tražiti od učenika da se uključe u razrednu raspravu, već je bitno da svaki učenik formulira svoje ideje i predstavi ih u ovoj fazi. To se može postići raspravom u manjim grupama. U problemu slagalice će pokušaj slaganja svih novoizrađenih dijelova predstavljati fazu formulacije. Za očekivati je da se neće svi dijelovi uklapati. Stoga će učenici voditi rasprave o strategijama koje su već isprobali, a moguće je razviti nove ideje o drugim pristupima. Učenik koji je koristio pravu strategiju mora u to matematički argumentirano uvjeriti ostatak skupine tako da razumiju i prihvate njegove ideje.

Nakon toga, u fazi **potvrđivanja** učenici ispituju svoje strategije ili hipoteze u odgovarajućem okruženju nastavne situacije. To znači da se rezultati rada učenika mogu potvrditi, a da im “nastavnik ne mora reći jesu li u pravu ili ne” (parafrazirajući A. Sierpinski, 2007.). U primjeru sa slagalicom nastavna je situacija oblikovana tako da učenici mogu provjeriti jesu li dobro radili i zaključivali ako se novi dijelovi mogu spojiti. Stoga, ako učenici u početku odaberu manje uspješnu strategiju, faza potvrđivanja pokazat će im da je njihova ideja pogrešna i da je potrebna druga strategija koja se kasnije može provjeriti na isti način. Važno je naglasiti da uspješna strategija mora biti u dosegu matematičkih sposobnosti učenika.

Posljednja je faza **institucionalizacije** u kojoj će osobno znanje konačno doći do stanja institucionaliziranog znanja. Ovu će fazu voditi nastavnik; organizirat će ideje, sažeti glavne točke zajedničkih strategija i predstaviti sve kao jednu optimalnu strategiju. Institucionalizirano znanje je na razini srednjoškolskog obrazovanja, znanje koje je predstavljeno u udžbenicima. To je sinteza matematičkih aktivnosti, matematičko znanje prezentirano sažeto i precizno, dok proces istraživanja koji je doveo do njegovog razvoja obično nije vidljiv. U problemu sa slagalicom nastavnik će uvesti neformalnu ideju sličnih likova, odnosno sličnosti, što je formalno institucionalizirano matematičko znanje.

Utrka do 20

Još jedan klasični primjer didaktičke situacije koja podržava učeničko istraživanje je "Utrka do 20". Radi se o igri koju igraju dva igrača. Prvi igrač na početku izgovara broj 1 ili 2. Nakon toga igrači naizmjenice dodaju broj 1 ili 2 na trenutačni broj, a igrač koji prvi dođe do broja 20 je pobjednik. Zadatak je odrediti koji igrač ima strategiju kojom može pobijediti neovisno o odabirima drugog igrača.

Učenici mogu početi s igranjem igre i otkrivanjem uzoraka na temelju kojih formiraju pobjedničku strategiju. Vrlo će brzo igrači primijetiti da onaj tko kaže 18 ili 19 sigurno gubi te je prvo važno otkriće da igrač koji izgovori 17 sigurno pobjeđuje. To je primjer zaključka koji će se ugraditi u pobjedničku strategiju. Uočimo da se učenici mogu samostalno uvjeriti u ispravnost svoje hipoteze jer je analiza poteza nakon izgovaranja broja 17 bazirana isključivo na poznavanju pravila igre i logičkom zaključivanju ("Drugi igrač mora dodati 1 ili 2. Ako drugi igrač poveća 17 za 1 na 18, onda ću ja povećati za 2 na 20. No, ako drugi igrač poveća 17 na 19, onda ću ja povećati 19 na 20.").

Nakon ovog početnog rasuđivanja potrebno je ponoviti isti način razmišljanja te zaključiti da je dio pobjedničke strategije izgovoriti broj 14, odnosno prije toga broj 11, a prije toga broj 8, pa 5, i konačno 2. Iz ovoga slijedi da je pobjednik onaj igrač koji je prvi na potezu, a njegova pobjednička strategija je na početku izgovoriti broj 2, te nakon toga redom izgovarati brojeve 5, 8, 11, 14, 17 i 20. Ti

koraci su zaista mogući jer na potez drugog igrača u kojem bira 1 (odnosno 2), mi možemo dodati 2 (odnosno 1), te smo zato sigurni da ćemo svoj zadnje izgovoreni broj povećati točno za 3. Dakle, koristeći matematički jezik, ključna opservacija za pobjedničku strategiju je vezana uz djeljivost brojem 3, tj. brojevi koje prvi igrač treba izgovarati da bi pobijedio daju ostatak 2 pri dijeljenju brojem 3.

Kako točno učenici u nižim razredima osnovne škole razmišljaju i zaključuju o ovoj igri, istraživao je Guy Brousseau, začetnik teorije didaktičkih situacija. Njegovo istraživanje pokazuje da se u dobi od 10 godina rješavanje zadanog problema, tj. otkrivanje pobjedničkih brojeva, događa u mnogo većem broju faza. Pokazano je da učenicima za svaki sljedeći broj u nizu 17, 14, 11... treba sve više i više vremena (tj. simulacija igre), što znači da induktivni način zaključivanja koji smo prezentirali njima nije prirodan. Velik broj simulacija igre (tj. dugotrajna faza akcije) je potreban kako bi se **iz igre** (kao jedinog izvora u nedostatku nastavnika kojeg se može tražiti za otkrivanje rješenja) prikupile povratne informacije i na temelju tog iskustva svakodnevnim jezikom formulirale hipoteze koje se tek onda logičkim zaključivanjem mogu dokazati. Potreba za dokazom pojavljuje se iz pragmatičnih razloga, najčešće zbog zamora od velikog broja pokušaja i pogrešaka, ali se neće nužno pojaviti kod svakog učenika. No, jednom kad učenik osjeti tu potrebu (na zahtjev nastavnika ili kako bi smanjio svoj broj pokušaja) ona će ga natjerati da svakodnevni jezik zamijeni logičkim zaključivanjem, te potencijalno uvođenjem matematičkih koncepata koji se nalaze u pozadini problema (npr. ostataka pri dijeljenju brojem 3).

Ovaj nam primjer govori mnogo o raznim aspektima istraživački usmjerene nastave matematike. Prije svega, upućuje na promijenjene uloge nastavnika i učenika. U pažljivo dizajniranoj didaktičkoj situaciji učenik ne treba čuti od nastavnika je li u pravu, već mu problem koji rješava, odnosno okruženje problema, omogućava testiranje njegove strategije. Stoga se rješenje problema nameće kao optimalna strategija u igri u kojoj je nastavnik samo postavio pravila. Uloga nastavnika je uspostaviti odnos s učenikom u kojem učenik pristaje preuzeti odgovornost za rješavanje ("igrati igru") i intervenirati promjenom problema ako učenik

ne može iskoristiti potencijal situacije jer je problem prejednostavan ili presložen u danom trenutku. Učenik u interakciji s problemom prolazi razne faze rješavanja problema u kojima ga vode povratne informacije koje dobiva od drugih učenika, nastavnika, te prvenstveno samog problema. U tom procesu gradi iskustvo frustracije i zadovoljstva, ali i vlastite koncepte koji daju smisao onome što radi. Svaki učenik pritom ima pomalo drukčiji doživljaj, a nastavnik na kraju sata povezuje učenikove ideje s matematičkim sadržajima koji su ciljani danim problemom i ključni za njegovo rješavanje. Način na koji nastavnik institucionalizira učenikove ideje vrlo je važan dio odnosa koji gradi učenikovo samopouzdanje i omogućava suradnju u sljedećoj situaciji.

U opisanom odnosu između učenika i nastavnika podjela odgovornosti ne može biti u potpunosti eksplicitno dogovorena jer se nastavnik mora suzdržati od otkrivanja ključnih informacija o situaciji kako bi potencijal za učenje koji situacija nosi ostao sačuvan za učenika. Nastavnik se mora suzdržati od predavanja i pomaganja preko mjere koja je nužna da bi učenik samostalno mogao istraživati. To nazivamo paradoks situacije: ako nastavnik jasno kaže što želi od učenika, učenik to više ne može ostvariti! I tako sami nastavnici otkrivaju novi izazov za vlastito strpljenje shvaćajući kako su krhke mogućnosti za razvoj kritičkog razmišljanja i učenikov osjećaj odgovornosti. Istovremeno, možemo se nadati da će učenik prepoznati kako upravo prekidom očekivanja gotovih rješenja od strane nastavnika počinje učenje i prihvatiti novu paradigmu koja ga osnažuje i veseli zbog njegove vlastite aktivne uloge.

Scenariji i moduli projekta MERIA

U okviru projekta MERIA testirano je desetak, a objavljeno sedam scenarija za provođenje istraživački usmjerene nastave matematike. Scenarijima se potiče istraživanje jednog važnijeg matematičkog koncepta te su predviđeni za izvođenje u trajanju od barem jednog školskog sata. To su *Povećanje površine*, *Tvornica bicikala*, *Linije sukoba – uvod*,

Put kočenja, *Tobogan*, *Oglas za posao* i *ab-ba*. Promotrimo strukturu MERIA scenarija na primjeru scenarija Tobogan.

Ciljano znanje u scenariju Tobogan je konceptualno razumijevanje nagiba krivulje kao nagiba tangente, dok su širi ciljevi matematičko modeliranje tobogana s pomoću grafova funkcija te izračunavanje nagiba (derivacija funkcije) ručno ili pomoću IKT-a. Scenarij može poslužiti kao smisljeni uvod u derivacije. Provođenjem scenarija razvijaju se istraživačke i interdisciplinarne vještine učenika. Učenici eksperimentiraju s različitim grafovima funkcija na papiru i korištenjem IKT-a, ponavljaju proces kako bi poboljšali rješenja, uspoređuju različite strategije, obrazlažu karakteristike dobivenog rješenja. Učenici mogu povezati svoje iskustvo glatkoće fizičkih objekata s matematičkim pojmovima tangente na krivulju i derivacijom funkcije. Matematički modeli mogu se koristiti za izradu 3D objekata ispisivanjem na 3D pisaču (IKT vještine) ili proizvodnjom s drugim materijalima (zanimati). Scenarij je predviđen za učenike u dobi od 16 do 18 godina, a provodi se dva školska sata.

Sat započinje didaktičkom fazom primopredaje u kojoj nastavnik učenicima predstavlja problem:

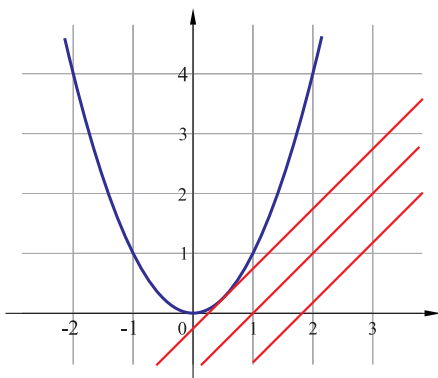
Dječji se tobogan sastoji od zakrivljenog dijela na gornjem ili donjem dijelu i jednog ravnog dijela u sredini. Primijenite matematiku i dizajnirajte takav oblik. Rješenje neka se sastoji od jednog ravnog i samo jednog zakrivljenog dijela. Pazite da spuštanje ne bude neugodno.



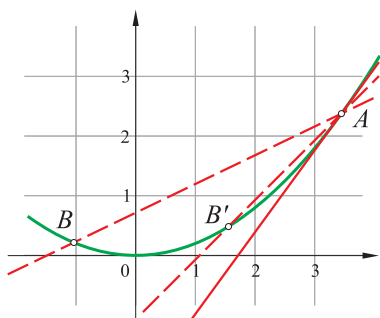
Slijedi adidaktička faza djelovanja u kojoj učenici samostalno radeći u skupinama skiciraju spust,

počevši od neke krivulje kojom modeliraju zakrivljeni dio, uvode koordinatni sustav i odabiru jedan od mogućih pristupa. Istraživanja u razredu (Bos, Dorman, Cafuta, Praprotnik, Antoliš i Bašić, 2019.) pokazala su da učenici biraju jedan od sljedeća tri pristupa.

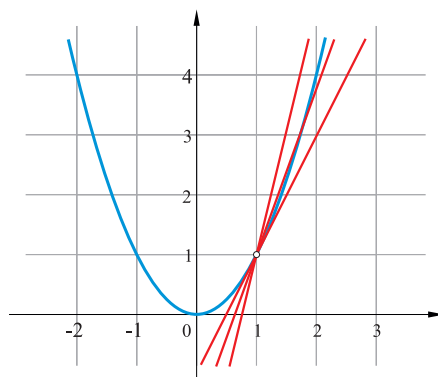
- 1. Pristup s pomoću granične linije:** učenici odabiru slobodan pravac i pomiču ga (translatiraju i rotiraju) dok ne dođe u položaj u kojem izgleda kao da postoji samo jedno sjecište s krivuljom koju promatraju.



- 2. Pristup s pomoću sekante:** učenici odabiru jednu točku na krivulji – točku u kojoj žele odrediti tangentu; zatim odabiru još jednu točku na krivulji i pomiču drugu točku bliže prvoj kako bi dobili glatki prijelaz.



- 3. Pristup s pomoću linearne aproksimacije:** Učenici odabiru jednu točku na krivulji, crtaju pravac i zatim pokušavaju prilagoditi nagib tako da pravac najbolje odgovara krivulji.



Neki učenici mogu koristiti kružnicu kao krivulju i činjenicu da je tangenta okomita na polumjer. Nastavnik uočava učeničke ideje, strategije i zaključke, po potrebi vodi raspravu o tome što to znači da spuštavanje ne smije biti neugodno i da rješenje treba imati glatki prijelaz između zakrivljenog i ravnog dijela.

Faza formulacije također je adidaktička. U toj fazi učenici formuliraju i prezentiraju svoja rješenja. U didaktičkoj fazi potvrđivanja nastavnik otvara raspravu pitanjem: “Kako znamo da je rješenje dobro? Postoji li najbolje rješenje?” Učenici objašnjavaju zašto je neko rješenje dobro i može li jedno biti bolje od drugog. Faza institucionalizacije je didaktička i u njoj nastavnik diskutira zapis tangente na način koji odgovara rješenjima do kojih su došli učenici. U završnom su dijelu scenarija detaljno opisani mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje. Detaljnije se može naći u samom MERIA modulu (Cafuta, 2019.), kao i u članku autora Bos i dr.

Umjesto zaključka – što kažu nastavnici i učenici

U suvremenom matematičkom obrazovanju smatra se poželjnim temeljiti učenje na konstruktivističkim idejama u kojima učenici istražuju problemske situacije, a nastavnik ima ulogu dizajnera nastavnog okruženja, odnosno “podupiratelja” procesa učenja. Takav je pristup alternativa tzv. “tradicionalnom pristupu”, eksplicitnom modelu prijenosa znanja (predavanja) od strane nastavnika u

kojem su učenici "primatelji" znanja, oni naučeno trebaju uvježbati. Ne zagovarajući niti jednu od tih dviju krajnosti jer su one pojednostavljena izuzetno složene stvarnosti u učionici (Godino, 2015.), projekt MERIA promovira uključivanje elemenata istraživački usmjerene nastave matematike u svakodnevnu nastavu matematike, kao jednog od mogućih oblika smislenog i kvalitetnog matematičkog obrazovanja. Uočimo da naša matematička svakodnevnica već sad nije krajnje tradicionalna, nego je često obojena heurističkom nastavom, nastavom u kojoj nastavnici razgovorom (heurističkim dijalogom), pripremljenim aktivnostima za učenike i drugim kratkim interakcijama, misaono vode učenike do razumijevanja nastavnih sadržaja. Projekt MERIA nudi nastavnicima nešto drukčije iskustvo – iskustvo provođenja otvorene istraživački usmjerene nastave, u kojoj je učenicima predana puno veća odgovornost za njihovo vlastito učenje.

U prethodnom tekstu pokazali smo na kojim je temeljima moguće zasnovati i kako je moguće strukturirati nastavne satove ili blokove istraživački usmjerene nastave matematike. Materijal razvijen u projektu rezultat je zajedničkog rada srednjoškolskih i sveučilišnih nastavnika matematike iz partnerskih zemalja za podršku nastavnicima koji često navode nedostatak vremena za njegovo osmišljavanje kao prepreku za izvođenje. Nije to jedina prepreka koju nastavnici navode. Kao i u sličnim projektima u Europi, tako i u intervjuima tijekom MERIA projekta, nastavnici su istakli da im je važno kakav će uspjeh ostvariti njihovi učenici na završnim testovima i/ili državnoj maturi. Izdajamo jedno tipično mišljenje, i to njemačkog srednjoškolskog nastavnika matematike, izrečeno u okviru projekta PRIMAS:

Moja je primarna zadaća učenike pripremiti za vanjsko vrednovanje koje im omogućuje steći svjedodžbu koja će im u budućnosti biti od koristi. Oni ne žele više. Ako napravim više, odmah će se usprotiviti. Zatim će mi roditelji reći da nije na meni da to radim.

Pod pretpostavkom da je cilj obrazovanja da "učenici steknu određena etablišana i kulturno priznata znanja" (Hersant i Perrin-Glorian, 2005.) čija se usvojenost provjerava sumativnim testovima, navedeno nas mišljenje ne začuđuje. No, je li to doista

jedini cilj obrazovanja? I je li drukčiji oblik nastave u kontradikciji s težnjom za dobrim rezultatom na sumativnim testovima? Nastavnici u MERIA projektu smatraju da nastava poduprta izrađenim scenarijima nikako nije u suprotnosti s tim težnjama. Štoviše, smatraju i da takvo iskustvo ohrabruje sve učenike, a ne samo one s boljim postignućima u rješavanju matematičkih problema i u drugim situacijama (Bašić i Milin Šipuš, 2019.).

Nastavnici uključeni u aktivnosti projekta MERIA potvrdili su i da imaju dovoljno vremena i slobode uključiti elemente istraživački usmjerene nastave u svoju redovnu nastavu te su izrazili pozitivne stavove u vezi materijala izrađenog i potvrđenog od projektnog tima u koji imaju povjerenje. Uočili su da istraživački usmjerena nastava matematike donosi veću dinamiku u razredu i da su MERIA scenariji učenicima zanimljivi. S druge strane, učenicima je posebno atraktivan element neizvjesnosti (uzbuđenja i misterije) koju donosi problematika nastavnog okruženja, a nastavnici tada koriste priliku da pokažu da iza igre pogađanja postoji matematičko (logično, znanstveno) objašnjenje.



Mnogo je faktora koji uvjetuju učenje i odrediti njihov utjecaj vrlo je složeno pitanje. Dinamika u učionici zahtijeva angažiranog, fleksibilnog i kritičnog nastavnika koji prepoznaje pravu ravnotežu nastavnih pristupa te ih isprepliće. Istraživački usmjerena nastava predstavlja izazov, kako za učenika tako i za nastavnika, jer se i jedni i drugi susreću s "nepoznatim". Iz perspektive nastavnika, zbog inicijative predane učenicima, povećava se razina nesigurnosti procesa učenja – nastavnik ne može predvidjeti i unaprijed se pripremiti za sve

situacije koje učenici mogu donijeti. Pozicija nastavnika je naizgled između dviju krajnosti, zahtjeva kurikula da se ostvari predviđeno matematičko znanje i zahtjeva istraživački utemeljene nastave u kojoj se novo znanje gradi na prijedlozima učenika. Ipak, smatramo da vrijedi pokušati. Ako zbog ničeg drugog, onda zbog iskustva provođenja istraživački usmjerene nastave kroz isprobane materijale i mogućnosti donošenja utemeljenih odluka o vlastitoj nastavi u budućnosti.



LITERATURA

- 1/ M. Bašić i Ž. Milin Šipuš (ur.) (2019.): *MERIA Project Impact Analysis*. Dostupno na <https://meria-project.eu/sites/default/files/2019-09/MERIA%20Project%20Impact%20Analysis.pdf>
- 2/ R. Bos, M. Doorman, K. Cafuta, S. Praprotnik, S. Antoliš i M. Bašić (2019.): *Supporting the reinvention of the slope of a curve in a point*, CERME 11, Utrecht, The Netherlands.
- 3/ G. Brousseau (1997.): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Didactique des Mathématiques. 1970 – 1990. Dordrecht-London: Kluwer Academic Publishers.
- 4/ R. Bruder i A. Prescott (2013.): Research evidence on the benefits of IBL, *ZDM*, 45, 811–822.
- 5/ K. Cafuta (ur.), (2019.): *MERIA scenariji i moduli*. Dostupno na <https://meria-project.eu/sites/default/files/2019-09/MERIA%20Scenarios%20and%20Modules%20HRV.pdf>
- 6/ Y. Chevallard, (2015.): Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. Izašlo u: S. Cho (ur.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 173–187, Springer.
- 7/ B. Dakić (2005.): In memoriam Ignacije Smolec, *Matematika i škola*, 29, 183–184.
- 8/ H. Freudenthal (1991.): *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- 9/ J. Godino, C. Batanero, G. Cañadas i J.-M. Contreras, (2015.): Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. Izašlo u: K. Krainer i N. Vondrová (ur.): *CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Prague, Czech Republic, 2642–2648.
- 10/ Y. N. Harari (2017.): *Homo deus: kratka povijest sutrašnjice*. Zagreb: Fokus.
- 11/ M. Hersant i M.-J. Perrin-Glorian (2005.): Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1), 113–151.
- 12/ M. Kogan i S. Laursen (2014.): Assessing Long-Term Effects of Inquiry-Based Learning: A Case Study from College Mathematics, *Innovative Higher Education*, 39, 183–199.
- 13/ A. Sierpinska, (2007.): 'I need the teacher to tell me if I am right or wrong', *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Seoul, South Korea, 45–64.
- 14/ E. Špalj. (2017.): *MERIA – Matematičko obrazovanje – značajno, zanimljivo i primjenjivo*, 8. međunarodna konferencija gimnazija 3K, Novi Sad, R. Srbija: Gimnazija "Isidora Sekulić".
- 15/ H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand i G. Schubring, (ur.) (2019.): *Legacy of Felix Klein*, ICME-13 Monographs, Springer.
- 16/ C. Winslow (ur.) (2017.): *Praktični vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike*. Dostupno na https://meria-project.eu/sites/default/files/2017-11/MERIA%20Practical%20Guide%20to%20IBMT_HRV.pdf