Nisu sve ocjene jednako teške

Predrag Novaković, Vukovar

Vrlo važna činjenica s kojom smo svakodnevno u dodiru, ponekad i nesvjesno, jest pridavanje težine i vrijednosti različitim stvarima, ljudima, osjećajima i ostalim životnim događajima. Sasvim je prirodno različite stvari na različite načine promatrati, procjenjivati i vrednovati. Različitost podrazumijeva razliku u barem jednoj osobini, a često je potrebno tu razliku i istaknuti.

Aritmetička sredina

Jedan od najpoznatijih i najčešće korištenih statističkih alata pri obradi podataka jest aritmetička sredina. Ova mjera centralne tendencije često se naziva i prosjek.

Definicija. Za brojevni niz podataka $x_1, \ldots, x_n$ njegovom aritmetičkom sredinom zovemo broj

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Primjera gdje nam sve koristi aritmetička sredina je zaista puno, no najčešće je računanje prosjeka (ocjena, temperature, visine, cijene, plaće itd.). Valja istaknuti, kada je riječ o ocjenama, kako je ovaj način računanja konačne ocjene jedan od najrasprostranjenijih kako u našem obrazovnom sustavu, tako i u ostalima.

Primjer 1. Izračunaj prosječnu ocjenu sljedećih ocjena: 4, 5, 3, 2, 1, 4, 4 i 5.

Rješenje: Prema formuli iz definicije aritmetičke sredine slijedi:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \\ &= \frac{4+5+3+2+1+4+4+5}{8} \\ &= \frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3.5.\end{aligned}$$

Zaokruživanjem decimalnog broja dobije se konačna ocjena 4.

Predrag Novaković, prof. matematike i fizike, Tehnička škola Nikole Tesle, Vukovar, predrag.novakovic1507@gmail.com

Težinska[1] aritmetička sredina

Kako je naglašeno u uvodu, ponekad se pojavljuje potreba za isticanjem, naglašavanjem ili suprotno – prigušivanjem određenih osobina, pojavnosti ili pak doprinosa određene jedinice u cjelini. Možemo reći kako nekim stvarima (članovima nekog skupa) pridajemo manju ili veću težinu, odnosno važnost u ovisnosti kako one participiraju u promatranom skupu. Svakako da želimo taj poseban doprinos na ukupnost i procijeniti, kako kvantitativno, tako i kvalitativno.

Kvantitativan će doprinos činiti ukupan broj promatranih događaja, dok će kvalitativan doprinos izražavati ustvari težinu svakog tog pobrojenog događaja.

Definicija. Težinska aritmetička sredina definira se sljedećim izrazom

$$\overline{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

gdje su vrijednostima $x_1, \ldots, x_n$ pridruženi nenegativni brojevi w_i zvani težine (ponderi) [1].

Primjer 2. Izračunaj prosječnu ocjenu sljedećih ocjena iz prethodnog primjera: 4, 5, 3, 2, 1, 4, 4 i 5. Ocjene su dobivene po sljedećim elementima ocjenjivanja s pripadajućim težinama:

1) usvojenost nastavnih sadržaja ($w_1 = 2$) 4, 5 i 3
2) primjena teorijskih znanja ($w_2 = 3$) 2, 1 i 4
3) aktivnost ($w_3 = 1$) 4 i 5.

Rješenje: Primjenom definicije težinske aritmetičke sredine jest:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_w &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \\
&= \frac{w_1x_1 + w_1x_2 + w_1x_3 + w_2x_4 + w_2x_5 + w_2x_6 + w_3x_7 + w_3x_8}{w_1 + w_1 + w_1 + w_2 + w_2 + w_2 + w_3 + w_3} \\
&= \frac{2\cdot 4 + 2\cdot 5 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 + 3\cdot 4 + 1\cdot 4 + 1\cdot 5}{2+2+2+3+3+3+1+1} \\
&= \frac{8+10+6+6+3+12+4+5}{3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 1} = \frac{54}{17} \approx 3.176.
\end{aligned}$$

U ovom je slučaju prosječna ocjena manja nego u slučaju klasične ili jednostavne aritmetičke sredine jer su ocjene složene u podskupove različitih važnosti. Naravno da težinska prosječna ocjena može biti i veća od obične, što bi se dogodilo kada bismo veće težine pridružili većim ocjenama.

Pretpostavimo li kako nema različitih težina, odnosno sve su težine iste $w_i = w =$ konst, vraćamo se na običnu aritmetičku sredinu:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_w &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \\
&= \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \ldots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} \\
&= \frac{w \cdot x_1 + w \cdot x_2 + \ldots + w \cdot x_n}{w + w + \ldots + w} \\
&= \frac{\cancel{w} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n \cdot \cancel{w}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \overline{x}.
\end{aligned}$$

Ponderi se mogu koristiti i u slučaju međusobno jednakih težina podataka ako postoji ponavljanje pojedinih podataka. U tom je slučaju ponder frekvencija pojavljivanja podatka. Formula se može izraziti i preko relativnih frekvencija $p_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_w &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \\
&= \frac{w_1 \cdot x_1}{\sum_{i=1}^n w_i} + \frac{w_2 \cdot x_2}{\sum_{i=1}^n w_i} + \ldots + \frac{w_n \cdot x_n}{\sum_{i=1}^n w_i}
\end{aligned}$$

[1] od engleske riječi *weighted* – težinski, a često se koristi i termin vagana ili ponderirana aritmetička sredina, gdje se pond još naziva i funta. Prema *Weights and Measures Act* jedinica *pound* je mjerna jedinica za masu i iznosi 1 lb= 0.5359 kg, ali i za silu (1 lbf definirana kao težina 1 lb).

$$= \frac{w_1}{\sum_{i=1}^n w_i} \cdot x_1 + \frac{w_2}{\sum_{i=1}^n w_i} \cdot x_2 + \ldots + \frac{w_n}{\sum_{i=1}^n w_i} \cdot x_n$$
$$= p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n$$
$$= \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i.$$

U primjeru 1 aritmetičku sredinu možemo prikazati na sljedeći način:

ocjena	1	2	3	4	5
frekvencija ocjene	1	1	1	3	2
relativna frekvencija p_i	$\frac{1}{1+1+1+3+2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$$
$$= p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + p_4 \cdot x_4 + p_5 \cdot x_5$$
$$= \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{3}{8} \cdot 4 + \frac{2}{8} \cdot 5$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{10}{8}$$
$$= \frac{1+2+3+12+10}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Primjer 3. U razredu s 24 učenika je 10 učenika čija je prosječna visina 178 cm i 14 učenica s prosječnom visinom 173 cm. Odredi prosječnu visinu razreda.

Rješenje: Očito su visine učenika podatci čija se aritmetička sredina traži tako da je $x_1 = 178$ cm i $x_2 = 173$ cm. No, njihovi doprinosi prosjeku nisu isti. Ako se doprinosima pridruže njihove težine, tada je prema definiciji težinske aritmetičke sredine:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$
$$= \frac{10 \cdot 178 + 14 \cdot 173}{10 + 14}$$
$$= \frac{1780 + 2422}{24} = \frac{4202}{24} \approx 175 \text{ cm}.$$

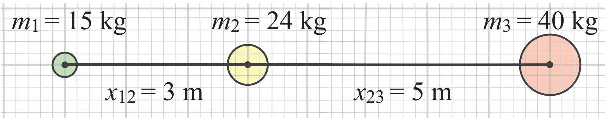
Primjer 4. U automobilskom se hladnjaku nalazi 3 l rashladne tekućine (antifriza) koja pruža zaštitu do -18 °C. Koliko treba dodati tekućine (-30 °C) da bi automobil bio zaštićen na temperaturama do -24 °C?

Rješenje: Nakon miješanja tekućina dobit će se tekućina čija su svojstva prosječne vrijednosti tekućina prije miješanja, što se može zapisati na način:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$
$$= \frac{3 \cdot (-18) + w_2 \cdot (-30)}{3 + w_2} = -24 \text{ °C}.$$

Jednostavnim sređivanjem ovog izraza dobije se $w_2 = 3$ l.

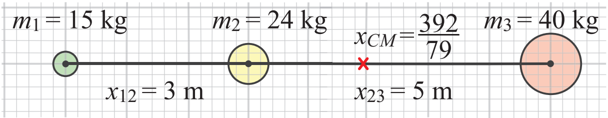
Primjer 5. Odredi težište (centar masa) sustava triju tijela sa slike.



Rješenje: Ovaj fizikalni primjer zorno prikazuje smisao težinske aritmetičke sredine gdje se traži aritmetička sredina jedne veličine (koordinate položaja) uzimajući u obzir različite težine[2] različitih položaja. Neka je središte koordinatnog sustava (relativno mjesto promatrača) u položaju tijela mase m_1. Tada je primjenom definicije težinske aritmetičke sredine:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$
$$= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$
$$= \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 x_{12} + m_3 (x_{12} + x_{23})}{m_1 + m_2 + m_3}$$
$$= \frac{15 \cdot 0 + 24 \cdot 3 + 40(3+5)}{15 + 24 + 40}$$
$$= \frac{0 + 72 + 320}{79} = \frac{392}{79} \approx 4.96 \text{ m}.$$

[2] Riječ težina ovdje ima značenje važnosti općenito, a nikako težine u fizikalnom smislu.



Excel i težinska aritmetička sredina

Jednostavniji zadatci, kao što su primjeri 3, 4 i 5, ne zahtijevaju puno vremena i truda, no za slučajeve većeg broja podataka i razreda, odnosno težina, poželjno je koristiti nekakve alate, kao npr. jednostavni *online* kalkulator [4] ili Excel koji nudi već gotovu opciju ili pak mogućnost kreiranja vlastite formule.

U programu Excel jednostavnu aritmetičku sredinu računamo s pomoću naredbe `Average` koja se nalazi na alatnoj traci `Editing` pod znakom sume Σ. Naredba `Sumproduct` koja se nalazi među `Formulama` računa težinsku aritmetičku sredinu odabranih podataka sukladno dodijeljenim težinama.

Primjene težinske aritmetičke sredine

Prigodom donošenja novog Pravilnika[3] o uvjetima i načinu ostvarivanja prava redovitih studenata na subvencionirano stanovanje, u svibnju 2017. predložen je i nije usvojen obračun prosječne ocjene primjenom formule težinske aritmetičke sredine, gdje su ponderi predstavljali ostvarene ECTS bodove koji trebaju korelirati sa složenošću predmeta.

Odgojno-obrazovni sustavi razvijenih država koji bi mogli poslužiti kao uzor, već duže vrijeme koriste ovaj način obračuna prosjeka ocjena poznatog i kao GPA[4]. Detaljniji prikaz s primjerom može se pronaći na raznim *online* GPA kalkulatorima [3] i [4].

Problem o prosjeku ocjena kao jednostavnoj aritmetičkoj sredini prezentiran u časopisu MiŠ [2] korektnije je rješiv težinskom aritmetičkom sredinom gdje bi pondere predstavljao npr. tjedni broj sati predmeta.

Neke od primjena [5] težinske aritmetičke sredine prikazane su i u gore navedenim primjerima iz života i ostalih znanstvenih disciplina.

LITERATURA

1/ Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Muhling (2004.): *Matematički priručnik*, Golden Marketing – Tehnička knjiga, Zagreb.

2/ Ž. Kraljić (2009.): Prosječna ocjena – da ili ne aritmetičkoj sredini?, *Matematika i škola 52*, str. 81–83.

3/ `http://www.back2college.com/gpa.htm`

4/ `https://www.calculat.org/hr/prosjek/ponderirana-aritmeticka-sredina.html`

5/ `https://www.onlinemathlearning.com/weighted-average-problems.html`

[3] `https://srednja.hr/studenti/vijesti/promjena-pravilnika-za-ostvarivanje-smjestaja-prosjek-ocjena-se-obracunava-na-novi-nacin/`

[4] Grade Point Average