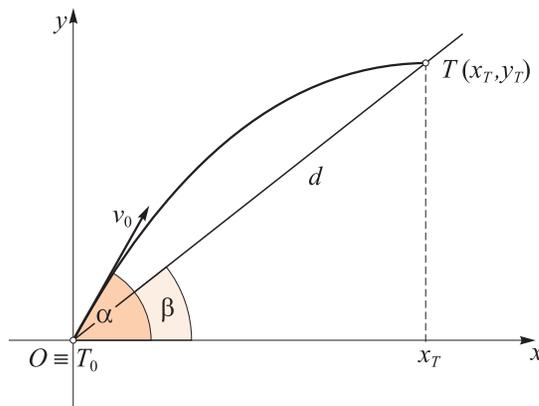


Fizika pomaže matematici

Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

U ovom kratkom prilogu pokazat ćemo kako možemo primijeniti znanje o kosom hitcu (fizika) da bismo dokazali adicijsku formulu $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ (matematika).



Neka se top nalazi u podnožju brda koje se uzdiže pod kutom β prema horizontalnoj ravnini. Topovski metak ispaljen je iz topa početnom brzinom v_0 (to je brzina metka u trenutku $t = 0$), pod kutom elevacije α i nakon nekog vremena t pada na padinu brda. Točku u kojoj metak pada na brdo označimo sa T . Pretpostavimo da je metak u trenutku $t = 0$ u ishodištu O ($\equiv T_0$) koordinatnog sustava, a koordinatna ravnina Oxy neka se podudara s ravninom leta metka. Otpor zraka zanemarujemo.

Iz fizike nam je poznato da je zakon kretanja točke T dan jednadžbama

$$x_T = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (x = x(t)) \quad (1)$$

$$y_T = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad (y = y(t)). \quad (2)$$

To su koordinate točke položaja. Dakle,

$$T\left(v_0 \cos \alpha \cdot t, v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\right).$$

Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

Zahvaljujem profesoru Borisu Bašiću iz Sarajeva na ukazanim pogreškama koje su ispravljene.

Neka je $|OT| = d$. U pravokutnom trokutu Ox_TT je

$$\cos \beta = \frac{x_T}{d} \iff d \cdot \cos \beta = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad (3)$$

$$\sin \beta = \frac{y_T}{d} \iff d \cdot \sin \beta = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (4)$$

Pomnožimo li (3) sa $\sin \beta$ i (4) sa $\cos \beta$ te ih oduzmemo, dobivamo:

$$v_0 \cos \alpha \sin \beta \cdot t = v_0 \sin \alpha \cos \beta - \frac{g}{2} t^2 \cos \beta,$$

odakle je

$$t = \frac{2v_0(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}{g \cos \beta}. \quad (5)$$

Promotrimo sada gore opisanu situaciju ovako. U istom vremenskom intervalu, udaljenost okomice na ravninu OT jednaka je 0. Komponenta početne brzine, okomita na tu ravninu je $v_0 \sin(\alpha - \beta)$, a ubrzanje u tom smjeru je $-g \cos \beta$ pa imamo da je

$$0 = [v_0 \sin(\alpha - \beta)] \cdot t - \frac{g \cos \beta}{2} \cdot t^2$$

i odavde lako dobivamo

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}, \quad (6)$$

pa iz (5) i (6) slijedi

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad \blacksquare$$

LITERATURA

1/ B. Pavković, D. Veljan (1995.): *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb.