

Uvođenje pojma razlomka

Sanja Varošaneć, Zagreb

U matematici se razlomku pristupa kao aritmetičko-geometrijskom i algebarskom konceptu. U prvom se konceptu razlomak smatra dijelom cjeline, dok je u drugom konceptu razlomak povezan s rješavanjem jednadžbi.



U početnom usvajanju pojma razlomka prisutan je samo prvi aspekt pojma razlomaka. Jednadžbu $ax = b$ i potrebu proširenja skupa cijelih brojeva razmatramo u kasnijim razredima, a problematika proširenja skupova brojeva intenzivno se razvija u srednjoškolskoj matematici.

Razlomak kao dio cjeline prirodan je pojam s kojim se većina učenika već susrela, i to u svakodnevnom životu. Razvoj koncepta razlomka odvija se u tri faze, kao što se događa i kod razvoja većine matematičkih koncepta.

Prva je faza upotreba **konkretnih objekata** iz naše stvarnosti. Tako se na jednake dijelove dijele čokolade, jabuke, naranče, torte, *pizza*, papir, količina tvari (paket bombona, šećer, sol, novac i sl.).

Druga je **apstraktno-konkretna faza** kad konkretni objekt zamjenjujemo matematičkim modelom, primjerice slikom kvadrata, pravokutnika, kruga i drugih matematičkih likova, tj. nekim grafičkim modelom.

Uspješno provedene te dvije faze dovest će do **treće faze**, tj. do **apstraktnog** poimanja razlomka. U toj je fazi učenik sposoban obavljati operacije s

razlomcima bez povezivanja s njihovim značenjem u svakodnevnom životu. U početnom usvajanju pojma razlomka treba uspješno provesti prve dvije faze.

Kod konkretnih i grafičkih modela postoji nekoliko momenata koje učenik treba uočiti:

- cjelina se dijeli
- ti dijelovi su jednaki
- u cjelini se dijelovi mogu nalaziti na različitim mjestima.

Modeli prikazivanja razlomaka

Modeli razlomaka koji se najčešće koriste u nastavi su: model prostora, model duljine i model grupe (Van De Walle, Karp i Bay-Williams, 2009.).

Model prostora obično podrazumijeva model površine i model volumena. Najčešće korišteni površinski modeli su krugovi, pravokutnici, ali mogu biti i trokuti te ostali likovi, najčešće oni pravilni (slika 1).



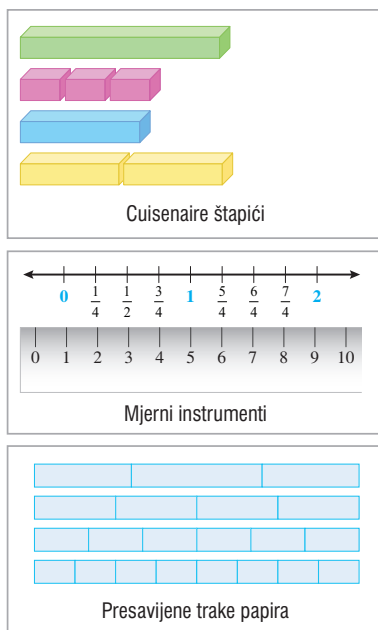
Slika 1.

Primjeri modela volumena mogu biti primjerice jabuka podijeljena na jednake dijelove kao na slici 2, boca s vodom napunjena do vrha ili djelomično napunjena itd.



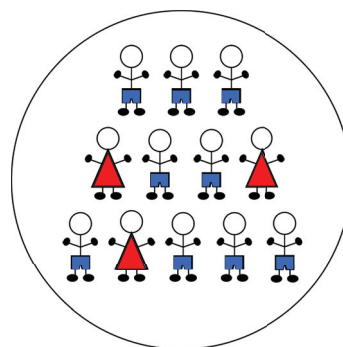
Slika 2.

Model duljine odnosi se na uspoređivanje dužina. To mogu biti nacrtane i podijeljene linije ili stvarni fizički materijal koji se uspoređuje na osnovu duljine kao na slici 3.



Slika 3.

U **modelu grupe** cjelina se shvaća kao više individualnih elemenata, a podgrupe te cjeline čine razlomke. Na primjer, 3 objekta čine $\frac{1}{4}$ grupe od 12 objekata, grupa od 12 u ovom primjeru predstavlja cjelinu. Van De Walle i sur. (2009.) sugeriraju da se kod modela grupe oko, primjerice, grupe žetona postavi uže ili nešto drugo što će zaokružiti sve te objekte kako bi učenici lakše mogli shvatiti cjelinu (slika 4).



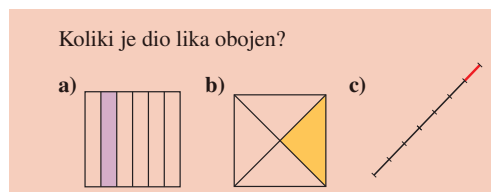
Slika 4.

Problemske situacije

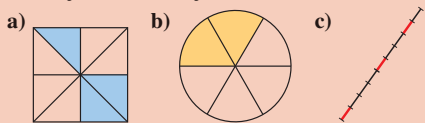
Učenike se stavlja u nekoliko problemskih situacija čije će rješavanje dovesti do uspješnog usvajanja pojma razlomka.

Prva problemska situacija. Nacrtana je cjelina i istaknut je (obično obojen) njezin dio. Treba odrediti koji razlomak prikazuje taj dio.

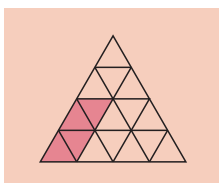
Unutar te problemske situacije treba paziti na primjenu načela postupnosti – prvo ćemo ponuditi obojen jedan dio cjeline, zatim više dijelova cjeline. Evo primjera:



Koliki je dio lika obojen?



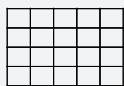
Budući da učeniku prezentiramo već gotove slike, cjelina može biti razdijeljena i na više dijelova, tj. ne moramo se zadržavati samo na razlomcima s "malim" nazivnicima. Bitno je samo da su dijelovi dovoljno jasni te da ih se može prebrojiti:



Druga problemska situacija. Zadana je cjelina i razlomak. Učenik treba podijeliti cjelinu na jednake dijelove i obojiti dio kojim je prikazan zadani razlomak.

Prva razina ove problemske situacije jest kad učeniku ponudimo već nacrtanu cjelinu s odgovarajućom podjelom, a učenik treba samo obojiti dio koji odgovara danom razlomku.

Zadatak. Oboji $\frac{3}{20}$ pravokutnika.



Druga, i mnogo složenija situacija jest kad učenik treba nacrtati cjelinu i podijeliti je na odgovarajući broj dijelova. I u takvoj problemskoj situaciji razinu složenosti možemo mijenjati – zadatak li oblik i dimenzije modela, situacija je postala manje složena od one kad ima mnogo stupnjeva slobode u odabiru.

Slijedi primjer jedne manje složene situacije jer zadavanjem dimenzija pravokutnika usmjeravam učenika na ideju da, primjerice, kod crtanja jedne

petine, duđu stranicu pravokutnika može podijeliti na 5 dijelova, dok će za crtanje dvadesetine, osim dijeljenja duže stranice trebati podijeliti i kraću stranicu pravokutnika na 4 dijela.

Nacrtaj 5 pravokutnika dimenzija $5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ i istakni:

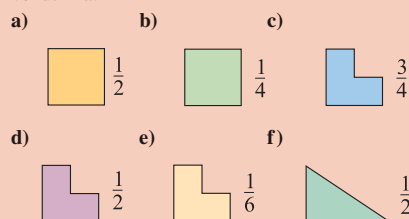
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$
 d) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{11}{20}$ pravokutnika.

Pri zadavanju zadataka vezanih uz drugu problemsku situaciju treba pripaziti na veličinu nazivnika. Nazivnik neka uvijek bude vezan uz dimenzije modela (kao što u prethodnom zadatku možemo laganu nacrtati dvadesetinu, ali bilo bi potpuno neprimjereno tražiti da se nacrti devetnaestina).

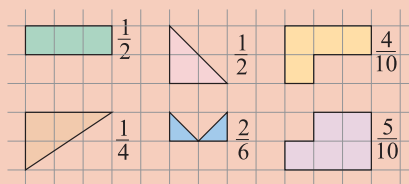
Treća problemska situacija. Zadan je dio koji iznosi $\frac{a}{b}$ neke cjeline. Doprvi cjelinu.

Primjer ovakvog problema dan je u sljedeća dva zadatka. Pri tome treba uočiti da je prvi zadatak jednostavniji jer učeniku daje uputu u kojem obliku treba tražiti rješenje (u obliku pravokutnika).

Na slici vidiš dijelove pravokutnika. Svaki od njih nacrtaj u bilježnicu i dopuni do cijelog pravokutnika.



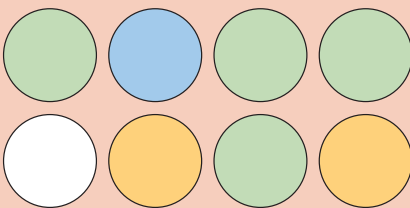
Nacrtaj crteže i dopuni ih kako bi dobio jedno cijelo.



Četvrta problemska situacija. Cjelina se sastoji od nekoliko objekata. Treba naći $\frac{a}{b}$ dio te cjeline.

Ova se situacija može izjednačiti i s problemom: zadano je m objekata, odredi n -tinu od tih m objekata. Primjer ovakvog problema je sljedeći zadatak.

Koliki dio krugova čine:



a) plavi b) zeleni c) narančasti krugovi?

Pokušaj naći više mogućnosti zapisa rješenja.

Ova vrsta zadataka vodi k zadacima tipa: Koliko je $\frac{4}{7}$ od 210?

Uvijek počinjemo sa zadacima u kojima još uvijek možemo uspostaviti vezu s konkretima, kao što imamo u sljedećem primjeru:

Izračunajmo:

a) $\frac{1}{5}$ od 45 kn

b) $\frac{3}{5}$ od 45 kn

U ovoj fazi cjelinu isključivo zadajemo tako da je djeljiva s nazivnikom. Dakle, ovdje se 45 kn može razdijeliti na 5 grupa, u svakoj grupi je 9 kn i svaka takva grupa čini jednu petinu cjeline koja se sastoji od nekoliko, točnije od 45 objekata (kuna).

Kad se odredi koliko iznosi jedna petina, tada do iznosa za $\frac{3}{5}$ dolazimo množenjem s 3 – uočimo da se ovdje javlja ideja proporcionalnosti koja će formalno biti obrađena u 7. razredu. No, već od 5. razreda imamo niz situacija gdje se koristi proporcionalnost veličina, iako, naravno, još ne koristimo taj stručni naziv.

Nakon zadataka s konkretnim objektima (kune, kilogrami, sati...) pojavljuju se apstraktni zadatci (koliko je $\frac{4}{7}$ od 210?) koji će u kasnijem školovanju postati problem najniže razine složenosti.

Međutim, u 5. razredu to još uvijek nije problem niske razine složenosti. Ovakve je probleme prikladno "zamotati" u tekstualne zadatke jer se tada osim razvijanja matematičkih sposobnosti intenzivno razvija i sposobnost čitanja s razumijevanjem.

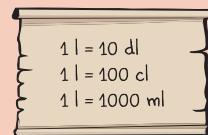
Marina je prvi dan pročitala $\frac{1}{6}$ knjige, a drugi dan $\frac{1}{3}$ knjige. Ako knjiga ima 126 stranica, koliko joj je stranica ostalo za čitanje?

U ovoj lekciji naglasak treba staviti i na probleme u kojima je moguće lako mentalno (napamet) odrediti dio cjeline, primjerice: "koliko je pola od 650?", "kolika je petina od 200?", "koliko litara iznosi četvrtina automobilskog spremnika od 48 litara?" i slična pitanja koja možemo očekivati u svakodnevnom životu.

U ovom se trenutku razvoja koncepta razlomka prirodno pojavljuje i pretvaranje mjernih jedinica.

Koliki je dio litre:

- a) 1 dl
- b) 1 ml
- c) 2 cl
- d) 41 ml?

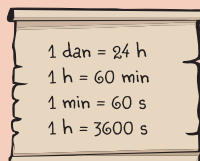


Koliki je dio dana:

- a) 27 min
- b) 3 h
- c) 360 min?

Koliki je mjeseci:

- a) $\frac{1}{2}$ godine
- b) $\frac{1}{3}$ godine
- c) $\frac{1}{4}$ godine?



Mješoviti brojevi

Iako će se u kasnijim godinama školovanja ovaj prikaz razlomka minorizirati, treba ga dobro usvojiti jer je on bitan korak u postupku procjene razlomka, tj. odgovora na pitanje "Između koja se dva prirodna broja nalazi razlomak $\frac{a}{b}$?".

Pritom vježbamo i prelazak iz jednog zapisa razlomka u drugi.

Sljedeću tablicu prepisi u bilježnicu i dopuni:

		
	$1\frac{3}{4}$	
		$\frac{11}{3}$

Prikazivanje razlomaka na brojevnom pravcu

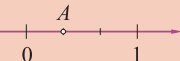
U ovoj nastavnoj jedinici povezujemo dva koncepta s kojima su učenici već upoznati: brojevni pravac i razlomak. Već na prvim satima usvajanja pojma razlomaka koristili smo uz modele kvadrata, pravokutnika i kruga i model dužine kao cjeline. Sad se ta cjelina–dužina postavlja na pravac, dobiva naziv "jedinična dužina", a svi oni zadatci koji su se radili u prvim satima obrade razlomaka s dužinama, temelj su za rad na jediničnoj dužini.

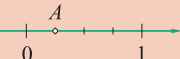
I opet imamo tri tipa problemske situacije:

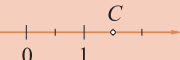
- očitaj razlomak
- nacrtaj razlomak
- nadopuni do cjeline

koje smo već imali i na početnim satima obrade razlomaka, samo što se sada sve događa na jediničnoj dužini.

Nacrtaj u bilježnicu i spoji parove:

(a)  (1) 

(b)  (2) 

(c)  (3) 

(d)  (4) 

Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom duljine 2 cm i na njemu istakni točke pridružene brojevima: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{4}$. Koja je točka pridružena broju $\frac{4}{4}$?

Udaljenost između točaka A i B je 36 mm. Nacrtaj u bilježnicu i odredi točke pridružene brojevima 0 i 1.

a) 

b) 

Pri zadavanju razlomaka treba biti posebno oprezan jer sad je potpuno neprimjereno tražiti crtanje razlomaka s velikim nazivnicima (osim s 10 i 100) na jediničnoj dužini.

I zašto ne povezati prikaz na pravcu s nekim zadatkom sa stupčastim dijagramom u kojem se ostvaruje korelacija s drugim predmetima? Pogledajmo primjer na vrhu sljedeće stranice.

Prisetimo se koja se vertikalna korelacija vezana uz brojevni pravac pojavljuje u matematičkom obrazovanju. Prvo se uspostavlja pridruživanje između skupa prirodnih brojeva i točaka pravaca. Sad se uspostavlja pridruživanje između skupa pozitivnih racionalnih brojeva i pravca. Kasnije će se uspostaviti funkcija između skupa cijelih brojeva i točaka

Iz porodice kopitara manji zooški vrt ima samo jelene, zebre i deve. Podatci o tome koliko jedinki ima zooški vrt nalaze se u dijagramu. Koliki dio od ukupnog broja kopitara čine jeleni, zebre, a koliko deve? Dobivene razlomke prikaži točkama na brojevnom pravcu.



pravca, potom između racionalnih brojeva i brojevnog pravca da bi sve kulminiralo pridruživanjem između skupa realnih brojeva i brojevnog pravca. Prisjetimo se da u geometrijskom pristupu definiranja skupa realnih brojeva upravo brojevni pravac ima ključnu ulogu. S tim se učenici susreću u prvom razredu srednje škole.

Dakle, kao što se dogodilo već puno puta do sada, počinjemo s razvojem ideje koja će svoju formalizaciju doživjeti u kasnijem razredu – to i jest bit cikličnosti usvajanja matematičkih koncepata koja se provlači kroz cijeli kurikulum.

LITERATURA

- 1/ G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošaneć (2019.): *Matematika 5, 1. dio, udžbenik za 5. razred osnovne škole*, Element, Zagreb.
- 2/ G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošaneć (2019.): *Matematika 5, 2. dio, udžbenik za 5. razred osnovne škole*, Element, Zagreb.
- 3/ J. Van De Walle, K. S. Karp, J. M. Bay-Williams, (2009.): *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally*, Pearson Higher ED, US.

LJETNI MATEMATIČKI REBUS

Zamijenite znak odgovarajućom znamenkom tako da račun bude točan.

1)

$$\begin{array}{r}
 \text{ice cream} \cdot \text{umbrella} \\
 + \\
 \text{umbrella} \cdot \text{bicycle} \\
 \hline
 \text{ice cream} \cdot \text{bicycle} - \text{umbrella} \cdot \text{sailboat} = \text{umbrella} \cdot \text{bicycle}
 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{r}
 \text{umbrella} \cdot \text{bicycle} \\
 + \\
 \text{ice cream} \cdot \text{sailboat} - \text{umbrella} = \text{sailboat} \cdot \text{ice cream} \\
 \hline
 \text{ice cream} \cdot \text{umbrella} \cdot \text{sailboat} \cdot \text{turtle} = \text{sailboat} \cdot \text{bicycle} \cdot \text{umbrella}
 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r}
 \text{sun} \cdot \text{sun} \\
 : \\
 \text{ice cream} \cdot \text{ice cream} + \text{bicycle} \cdot \text{sailboat} = \text{umbrella} \cdot \text{bicycle} \\
 \hline
 \text{umbrella} + \text{bicycle} \cdot \text{bicycle} = \text{sailboat} \cdot \text{turtle}
 \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{r}
 \text{bicycle} \cdot \text{sailboat} \\
 + \\
 \text{bicycle} - \text{ice cream} = \text{sailboat} \cdot \text{umbrella} \\
 \hline
 \text{bicycle} \cdot \text{umbrella} + \text{sailboat} \cdot \text{turtle} = \text{ice cream} \cdot \text{sailboat}
 \end{array}$$

Rješenja: 1) $32 \times 6 = 192$, $2 \times 4 = 8$, $34 - 10 = 24$; 2) $66 \times 3 = 198$, $22 + 85 = 107$, $3 + 88 = 91$; 3) $4 \times 8 = 32$, $20 - 8 = 12$, $24 \times 16 = 384$; 4) $31 \times 6 = 186$, $7 - 4 = 3$, $38 + 24 = 62$