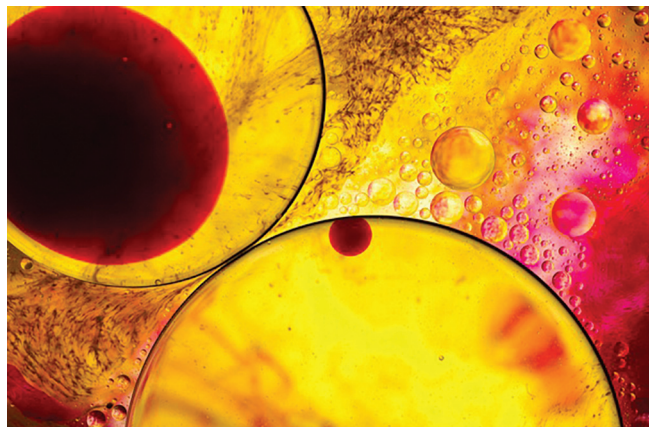


Geometrijski prikaz Fareyeva niza

Radomir Lončarević, Zagreb

Prikaz racionalnih brojeva na brojevnom pravcu najčešći je način njihove geometrijske interpretacije. U ovom članku prikazan je nešto manje poznat geometrijski prikaz racionalnog broja s pomoću kružnica, točnije Fordovih kružnica. U nastavku je prikazana konstrukcija skupa Fordovih kružnica pomoću Fareyeva niza te su na kraju dani iskazi i dokazi najvažnijih geometrijskih analogona svojstava Fareyeva niza.



Uvod

U šestom razredu osnovne škole prvi se put uvodi pojam racionalnog broja kao broja koji se može zapisati u obliku razlomka $\frac{p}{q}$, pri čemu su brojnik i nazivnik iz skupa cijelih brojeva, a nazivnik je različit od nule. Pojam razlomka usvaja se ranije tijekom petog razreda. Nadalje, tada se i prvi put susrećemo s geometrijskom interpretacijom racionalnog broja kao točke na brojevnom pravcu. Prikaz racionalnih brojeva na brojevnom je pravcu najčešći i često jedini način kako tijekom obrazovanja geometrijski interpretiramo racionalne brojeve. U ovom članku pokazat ćemo da se racionalni brojevi mogu geometrijski prikazati i s pomoću kružnica. Prvi takav prikaz i opis dao je američki matematičar Lester R. Ford u [2] po kome nose naziv Fordove kružnice. U nastavku ćemo dokazati nekoliko zanimljivih svojstava Fordovih kružnica koja predstavljaju geometrijske analogone svojstava Fareyeva niza. U broju 95 Miš-a bilo je već riječi o Fareyevu nizu, iskazana su i dokazana najvažnija svojstva te prikazane pri-

mjene u rješavanju linearnih diofantskih jednadžbi i aproksimaciji iracionalnih brojeva, a ovdje ćemo promatrati njegov geometrijski prikaz.

Svojstva Fareyeva niza

Radi lakšeg razumijevanja nastavka, navest ćemo definiciju i najvažnija svojstva Fareyeva niza obrađena u [1].

Definicija 2.1. (Definicija Fareyeva niza) Neka je $n \in \mathbf{N}$. Fareyev niz F_n reda n je niz svih racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$, gdje su p i q cijeli brojevi takvi da je $0 \leq p \leq q \leq n$, i $\text{nzd}(p, q) = 1$, zapisani u rastućem redoslijedu.

Definicija 2.2. (Definicija medijanta) Neka su $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$. Razlomak $\frac{a+c}{b+d}$ naziva se medijant razlomaka $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$.

Propozicija 2.1. (Svojstvo medijanta) Neka su $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Ako je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, onda je $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

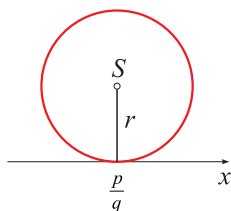
Svaki razlomak u Fareyevu nizu F_n , osim $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$, dobiven je kao medijant svojih susjednih razlomaka. Određivanjem medijanta definiran je i redoslijed razlomaka u nizu F_n . Općenito, Fareyev niz F_n dobiva se računanjem medijanta svakih dvaju uzastopnih članova niza F_{n-1} tako dugo dok je nazivnik dobivenog medijanta manji od ili jednak n .

Teorem 2.1. (Svojstvo uzastopnih elemenata Fareyeva niza F_n) Racionalni brojevi $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dva su uzastopna elementa Fareyeva niza F_n ako i samo ako je $|bc - ad| = 1$.

Korolar 2.1. Ako su $\frac{a}{b}, \frac{r}{s}, \frac{c}{d}$ tri uzastopna elementa Fareyeva niza F_n , onda je $\frac{r}{s} = \frac{a+c}{b+d}$.

Definicija Fordovih kružnica i primjeri

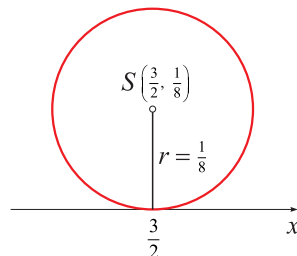
Definicija 3.1. Neka su p i q cijeli brojevi takvi da je $\text{nz}(p, q) = 1$. Kružnica $C\left(\frac{p}{q}\right)$ sa središtem u $S\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$ i polumjera $r = \frac{1}{2q^2}$ naziva se Fordova kružnica.



Slika 1. Fordova kružnica $C\left(\frac{p}{q}\right)$

Primjer 1. Nacrtajte Fordovu kružnicu $C\left(\frac{3}{2}\right)$.

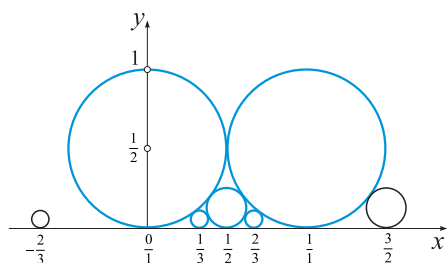
Rješenje. Kako je $p = 3$ i $q = 2$, kružnica ima središte $S\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right)$ i polumjer $r = \frac{1}{8}$.



Primijetimo iz Definicije 3.1. i Primjera 1 da je y koordinata središta Fordove kružnice jednaka iznosu polumjera. Stoga će se središte svake Fordove kružnice nalaziti iznad x -osi te će svaka Fordova kružnica $C\left(\frac{p}{q}\right)$ dodirivati x -os u racionalnom broju $\frac{p}{q}$, tj. x -os će biti tangenta svake Fordove kružnice $C\left(\frac{p}{q}\right)$ u točki $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$. Nacrtajmo još nekoliko Fordovih kružnica.

Primjer 2. Nacrtajte Fordove kružnice $C\left(-\frac{2}{3}\right), C\left(\frac{0}{1}\right), C\left(\frac{1}{3}\right), C\left(\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{2}{3}\right), C\left(\frac{1}{1}\right)$ i $C\left(\frac{3}{2}\right)$.

Rješenje.



U prethodnom primjeru uočavamo da nacrtane Fordove kružnice ili nemaju zajedničkih točaka, kao na primjer $C\left(-\frac{2}{3}\right)$ i $C\left(\frac{1}{3}\right)$ ili se dodiruju u jednoj točki, kao na primjer $C\left(\frac{1}{2}\right)$ i $C\left(\frac{2}{3}\right)$. U nastavku ćemo za kružnice koje se dodiruju u jednoj točki koristiti termin *tangentne kružnice*. Nadalje, isto tako možemo uočiti da nema kružnica koje se sijeku

u više od jedne točke. Je li to pravilo ili samo izuzetak, otkrit ćemo u nastavku članka.

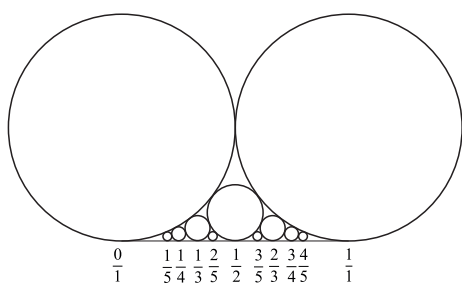
Definicija 3.2. Skupom Fordovih kružnica, oznake C_n , nazivamo skup svih Fordovih kružnica polumjera $r \geq \frac{1}{2n^2}$.

U Primjeru 2 plavom bojom istaknut je skup Fordovih kružnica C_3 i to za racionalne brojeve iz segmenta $[0, 1]$. U nastavku članka, zbog jednostavnosti promatrat ćemo Fordove kružnice samo za racionalne brojeve $\frac{p}{q} \in [0, 1]$.

Primjer 3. Za racionalne brojeve iz segmenta $[0, 1]$ odredite skup C_5 i prikažite ga grafički.

Rješenje. Primjenom Definicije 3.2. imamo

$$C_5 = \left\{ C\left(\frac{0}{1}\right), C\left(\frac{1}{5}\right), C\left(\frac{1}{4}\right), C\left(\frac{1}{3}\right), C\left(\frac{2}{5}\right), C\left(\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{3}{5}\right), C\left(\frac{2}{3}\right), C\left(\frac{3}{4}\right), C\left(\frac{4}{5}\right), C\left(\frac{1}{1}\right) \right\}.$$



Primjećujete da skup C_5 sadrži skup C_4 i kružnice polumjera $r = \frac{1}{2 \cdot 5^2}$.

Općenito, skup kružnica C_n unija je skupa C_{n-1} i skupa Fordovih kružnica radijusa $\frac{1}{2n^2}$.

Fordove kružnice i Fareyev niz

Odredimo li Fareyev niz reda 5, dobit ćemo

$$F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Uočavate li vezu između Fareyeva niza F_5 i skupa Fordovih kružnica C_5 iz Primjera 3? Primjećujete li da za svaki racionalni broj $\frac{p}{q}$ iz niza F_5 postoji

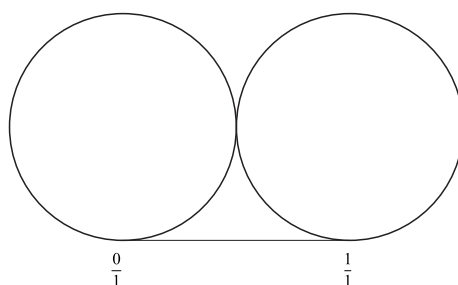
Fordova kružnica $C\left(\frac{p}{q}\right)$? Sljedećom propozicijom pojasnit ćemo vezu između Fareyeva niza F_n i skupa Fordovih kružnica C_n .

Propozicija 4.1. Za Fareyev niz F_n i skup Fordovih kružnica C_n postoji jedinstveno bijektivno preslikavanje $f: F_n \rightarrow C_n$.

Propozicija 4.1. govori da za svaki racionalni broj $\frac{p}{q} \in F_n$ postoji jedinstvena kružnica $C\left(\frac{p}{q}\right) \in C_n$ i obrnuto. U sljedećem primjeru pokazat ćemo konstrukciju skupa C_n s pomoću Fareyeva niza F_n i to za $n \leq 4$.

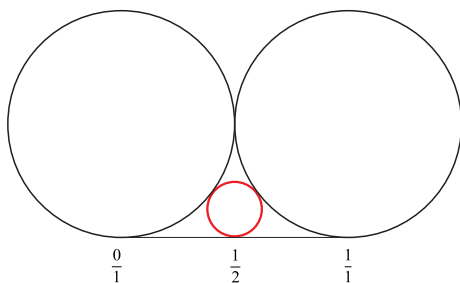
Primjer 4. Odredite i grafički prikažite skupove C_1 , C_2 , C_3 i C_4 .

Rješenje. Za Fareyev niz reda 1, $F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$, odredimo i grafički prikažemo kružnice $C\left(\frac{0}{1}\right)$ i $C\left(\frac{1}{1}\right)$ (Slika 2a).



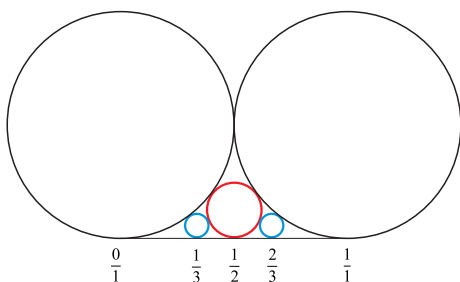
Slika 2a. Skup C_1

Za Fareyev niz reda 2, $F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$, odredimo i grafički prikažemo kružnice $C\left(\frac{0}{1}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}\right)$ i $C\left(\frac{1}{1}\right)$ (Slika 2b).



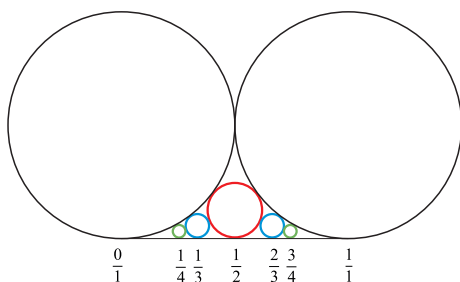
Slika 2b. Skup C_2

Za Fareyev niz reda 3, $F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$, odredimo i grafički prikazemo kružnice $C(\frac{0}{1})$, $C(\frac{1}{3})$, $C(\frac{1}{2})$, $C(\frac{2}{3})$ i $C(\frac{1}{1})$ (Slika 2c).



Slika 2c. Skup C_3

Za Fareyev niz reda 4, $F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$, odredimo i grafički prikazemo kružnice $C(\frac{0}{1})$, $C(\frac{1}{4})$, $C(\frac{1}{3})$, $C(\frac{1}{2})$, $C(\frac{2}{3})$, $C(\frac{3}{4})$ i $C(\frac{1}{1})$ (Slika 2d).



Slika 2d. Skup C_4

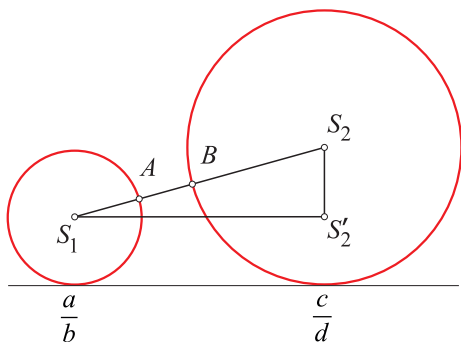
Na Slici 2a možemo vidjeti da su kružnice $C(\frac{0}{1})$ i $C(\frac{1}{1})$ tangentne kružnice. Na Slici 2b istaknuta je kružnica $C(\frac{1}{2})$ koja je tangentna s kružnicama $C(\frac{0}{1})$ i $C(\frac{1}{1})$. Primijetite da je razlomak $\frac{1}{2}$ član niza F_2 te je dobiven kao medijant uzastopnih razlomaka $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$ iz niza F_1 . Na Slici 2c istaknute su kružnice $C(\frac{1}{3})$ i $C(\frac{2}{3})$. Primijetite da razlomci $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ nisu članovi niza F_2 , ali su oba dobivena kao medijanti uzastopnih razlomaka iz niza F_2 . Razlomak $\frac{1}{3}$ medijant je razlomaka $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{2}$, a $\frac{2}{3}$ je medijant razlomaka $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{1}$. Kružnica $C(\frac{1}{3})$ tangentna je s kružnicama $C(\frac{0}{1})$ i $C(\frac{1}{2})$. Isto tako je kružnica $C(\frac{2}{3})$ tangentna s kružnicama $C(\frac{1}{2})$ i $C(\frac{1}{1})$. Iznesene ćemo zaključke u nastavku poopćiti i dokazati.

Svojstva Fordovih kružnica

U Primjeru 4 ponovno možemo vidjeti da su Fordove kružnice ili tangentne ili nemaju zajedničkih točaka. Sljedeći će teorem nam odgovoriti na ranije postavljeno pitanje, je li to pravilo ili izuzetak, te postoje li Fordove kružnice koje imaju više od jedne zajedničke točke. U [1] dan je dokaz Teorema 2.1, a ovdje ćemo iskazati i dokazati njegov geometrijski analogon.

Teorem 5.1. Fordove kružnice $C(\frac{a}{b})$ i $C(\frac{c}{d})$ su tangentne ako i samo ako je $|bc - ad| = 1$. Ako dvije Fordove kružnice nisu tangentne, onda one nemaju zajedničkih točaka.

Dokaz. Označimo središta kružnica $C(\frac{a}{b})$ i $C(\frac{c}{d})$ redom sa S_1 i S_2 . Presjek dužine S_1S_2 s kružnicama označimo sa A i B te presjek okomice spuštene iz središta S_2 na x -os s pravcem povučenim iz središta S_1 paralelno s x -osi označimo sa S'_1 .



Slika 3. Geometrijski dokaz tangenčnih kružnica

Iz Slike 3 imamo $|S_1S'_2| = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$, $|S_2S'_2| = \frac{1}{2d^2} - \frac{1}{2b^2}$. Primjenom Pitagorina poučka na pravokutan trokut $S_1S_2S'_2$ slijedi

$$\begin{aligned} |S_1S_2|^2 &= \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2d^2} - \frac{1}{2b^2}\right)^2 \\ &= \frac{(bc-ad)^2}{d^2b^2} + \left(\frac{1}{2d^2}\right)^2 + \frac{2}{4d^2b^2} - \frac{4}{4d^2b^2} + \left(\frac{1}{2b^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2d^2} + \frac{1}{2b^2}\right)^2 + \frac{(bc-ad)^2}{d^2b^2} - \frac{4}{4d^2b^2} \\ &= (|S_1A| + |BS_2|)^2 + \frac{(bc-ad)^2 - 1}{d^2b^2}. \end{aligned}$$

Ako je $|bc-ad| > 1$, onda je $|S_1S_2| > |S_1A| + |BS_2|$, tj. kružnice $C\left(\frac{a}{b}\right)$ i $C\left(\frac{c}{d}\right)$ nemaju zajedničkih točaka. Ako je $|bc-ad| < 1$, onda je $bc-ad = 0$, odakle slijedi da je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, što je u suprotnosti s pretpostavkom o dvjema različitim kružnicama $C\left(\frac{a}{b}\right)$ i $C\left(\frac{c}{d}\right)$.

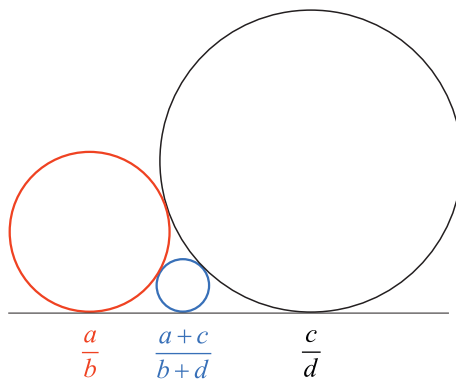
Ako je $|bc-ad| = 1$, onda je $|S_1S_2| = |S_1A| + |BS_2|$, što povlači da su kružnice $C\left(\frac{a}{b}\right)$ i $C\left(\frac{c}{d}\right)$ tangente kružnice. Dokažimo i obrat teorema.

Ako su kružnice tangente, onda je udaljenost između središta kružnica jednaka zbroju radijusa, tj. $|S_1S_2| = \frac{1}{2d^2} + \frac{1}{2b^2}$. Sada iz jednadžbe 1 slijedi $\frac{(bc-ad)^2 - 1}{d^2b^2} = 0$ odnosno $|bc-ad| = 1$.

Korolar 5.1. Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dva uzastopna razlomka u Fareyevu nizu F_n , onda su Fordove kružnice $C\left(\frac{a}{b}\right)$ i $C\left(\frac{c}{d}\right)$ tangente u skupu Fordovih kružnica C_m , $m \geq n$.

U sljedećoj propoziciji dokazat ćemo geometrijski analogon svojstva medijanta iskazano Propozicijom 2.1.

Propozicija 5.1. (Svojstvo medijanta za Fordove kružnice) Ako su $C\left(\frac{a}{b}\right)$ i $C\left(\frac{c}{d}\right)$ tangente Fordove kružnice, onda postoji jedinstvena Fordova kružnica $C\left(\frac{a+c}{b+d}\right)$ koja je tangenta objema kružnicama.



Dokaz. Koristeći Teorem 5.1. dovoljno je pokazati $|b(a+c) - a(b+d)| = 1$ i $|c(b+d) - d(a+c)| = 1$. Dokazat ćemo prvu jednakost, a dokaz druge ide analogno $|b(a+c) - a(b+d)| = |ba + bc - ab - ad| = |bc - ad|$ pa po Teoremu 5.1. slijedi $|bc - ad| = 1$, čime je tvrdnja dokazana.

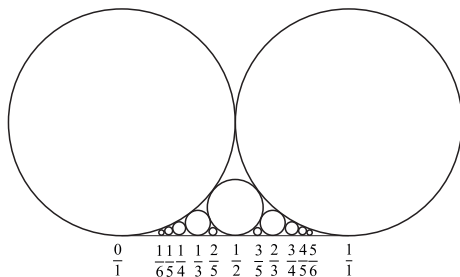
Sada možemo reći da Slika 2a predstavlja geometrijski prikaz niza F_1 , Slika 2b geometrijski prikaz niza F_2 , Slika 2c geometrijski prikaz niza F_3 i Slika 2d geometrijski prikaz Fareyeva niza F_4 . Opcenito, geometrijski prikaz Fareyeva niza F_n jest skup tangenčnih Fordovih kružnica C_n .

Za kraj pokažimo da se primjenom Propozicije 5.1. skup Fordovih kružnica može konstruirati na isti način kao Fareyev niz u [1].

Primjer 5. Odredite geometrijski prikaz Fareyeva niza F_6 .

Rješenje. U Primjeru 3 dan je geometrijski prikaz Fareyeva niza F_5 . Primjenom Propozicije 5.1 dobivamo tangentnu kružnicu $C\left(\frac{1}{6}\right)$ kružnicama $C\left(\frac{0}{1}\right)$ i $C\left(\frac{1}{5}\right)$ te tangentnu kružnicu $C\left(\frac{5}{6}\right)$ kružnicama $C\left(\frac{4}{5}\right)$ i $C\left(\frac{1}{1}\right)$. Ostale tangentne kružnice ovdje nećemo određivati jer nisu iz skupa C_6 , kao na primjer $C\left(\frac{4}{7}\right)$. Kružnica $C\left(\frac{4}{7}\right)$ bit će tangentna kružnicama $C\left(\frac{1}{2}\right)$ i $C\left(\frac{3}{5}\right)$ u skupu $C_n, n \geq 7$.

$$C_6 = \left\{ C\left(\frac{0}{1}\right), C\left(\frac{1}{6}\right), C\left(\frac{1}{5}\right), C\left(\frac{1}{4}\right), C\left(\frac{1}{3}\right), C\left(\frac{2}{5}\right), C\left(\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{3}{5}\right), C\left(\frac{2}{3}\right), C\left(\frac{3}{4}\right), C\left(\frac{4}{5}\right), C\left(\frac{5}{6}\right), C\left(\frac{1}{1}\right) \right\}.$$



Iz prethodnog primjera možemo uočiti da skup Fordovih kružnica C_6 sadrži više informacija nego Fareyev niz

$$F_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Na primjer, iz niza F_6 ne možemo vidjeti postoji li Fareyev niz reda manjeg od 6 u kojem su racionalni brojevi $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$ nekoć bili uzastopni. No, iz grafičkog prikaza skupa C_6 vidimo da su kružnice $C\left(\frac{0}{1}\right)$ i $C\left(\frac{1}{1}\right)$ tangentne, što povlači da su racionalni bro-

jevi $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$ nekada bili uzastopni razlomci. Znamo da je riječ o nizu F_1 . Možemo reći da skup Fordovih kružnica čuva informaciju o uzastopnim racionalnim brojevima, a samim time vizualizira koncept medijanta te svojstva Fareyeva niza navedena u [1].

Zaključak

U ovom radu pokazali smo da sva navedena svojstva Fareyeva niza u [1] imaju svoj geometrijski analogon. Geometrijski analogon uzastopnih razlomaka u Fareyevu nizu jesu tangentne Fordove kružnice. Ako su dvije Fordove kružnice tangentne, tada najveća Fordova kružnica, koja je tangentna s obje kružnice, predstavlja geometrijski analogon svojstva medijanta. Na kraju je zanimljivo primijetiti da skup Fordovih kružnica kao geometrijski prikaz Fareyeva niza sadrži više informacija nego sam Fareyev niz. Na primjer, u skupu Fordovih kružnica možemo vidjeti koji su racionalni brojevi nekada bili uzastopni tako da provjerimo jesu li odgovarajuće Fordove kružnice međusobno tangentne, dok se to u Fareyevu nizu ne može provjeriti.

Kako Fordove kružnice predstavljaju vezu između geometrije i teorije brojeva, samim time su zanimljive za znanstvena istraživanja, a isto tako mogu poslužiti kao dobar izvor informacija za dodatnu nastavu u osnovnoj i srednjoj školi.

LITERATURA

- 1/ R. Lončarević (2018.): Fareyev niz, *Matematika i škola* 95, str. 221–226.
- 2/ R. L. Ford (1938.): Fractions, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 45, No 9., str. 586–601.
- 3/ J. Amen (2006.): Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem, *MAT Exam Expository Papers, Paper 2*, <http://digitalcommons.unl.edu/mathmidexppap/2>
- 4/ J. Ainsworth, M. Dawson, J. Pianta, J. Warwick (2012.): *The Farey sequence Year 4 Project*, School of mathematics, University of Edinburgh, <http://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/fareyproject.pdf>