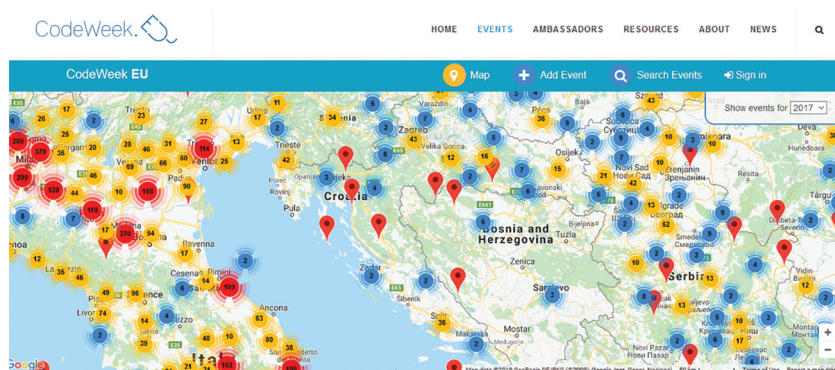


# Igrajmo se GeoGebrom



Julijana Novaković, Split

Slika 1. Školski projekt u III. gimnaziji Split "Creating Games and Interactive Fun Activities – Geogebra"

Sa željom da uspješno obilježimo tjedan europskog programiranja uključili smo se u **Code Week**, međunarodnu inicijativu koja ima za cilj omogućiti kodiranje i digitalnu pismenost svima. Kako bismo potaknuli razvoj ne samo digitalnih, nego i matematičkih kompetencija, uz istraživački pristup, organizirano je nekoliko radionica GeoGebre za učenike. Iznimno ugodno okruženje kao preduvjet za rad potaknulo je suradnju i stvorilo kreativnu atmosferu za razvoj projekta izraslog iz ideje matematičkih igara u GeoGebri. Naglasak je na istraživačkoj, problemskoj i projektnoj nastavi uz primjenu računalnog razmišljanja, te prikaz mogućnosti koje se nude i nastavniku i učeniku kroz GeoGebru.

## Uvod ili kako je započela naša avantura u GeoGebri

Igrajući se, otkrila sam ljepote tehnika podučavanja koje koriste GeoGebru kao alat, a omogućuju nam problem "napasti" iz različitih kutova, koristeći prethodno stečena matematička znanja (koja su za tu priliku nerijetko i proširena) uz razvijene vještine programiranja i računalnog mišljenja. Na prvi pogled izgleda kao da povezujemo potpuno različite teorije, no uz pomoć alata GeoGebre kompleksni objekti postaju gotovo trivijalni.

Code Week događaj prerastao je u školski projekt **Igrajmo se GeoGebrom**, a dijelove tog projekta prezentirali smo kroz radionice "učenici učenicima",



Slika 2. Učenici na radionici demonstriraju računalnu verziju dječje japanske igre *Amida* te verziju na ploči, na papirnatom modelu valjka i na modelu.

održane na Večeri matematike u organizaciji Split-skog matematičkog društva. Temu iz projekta uklopili smo u radionicu izrade matematičkog nakita za nadolazeće božićne blag dane.

Julijana Novaković, prof., III. gimnazija Split, [julijana.novakovic@skole.hr](mailto:julijana.novakovic@skole.hr)

## Prvi koraci

### Metode i oblici rada

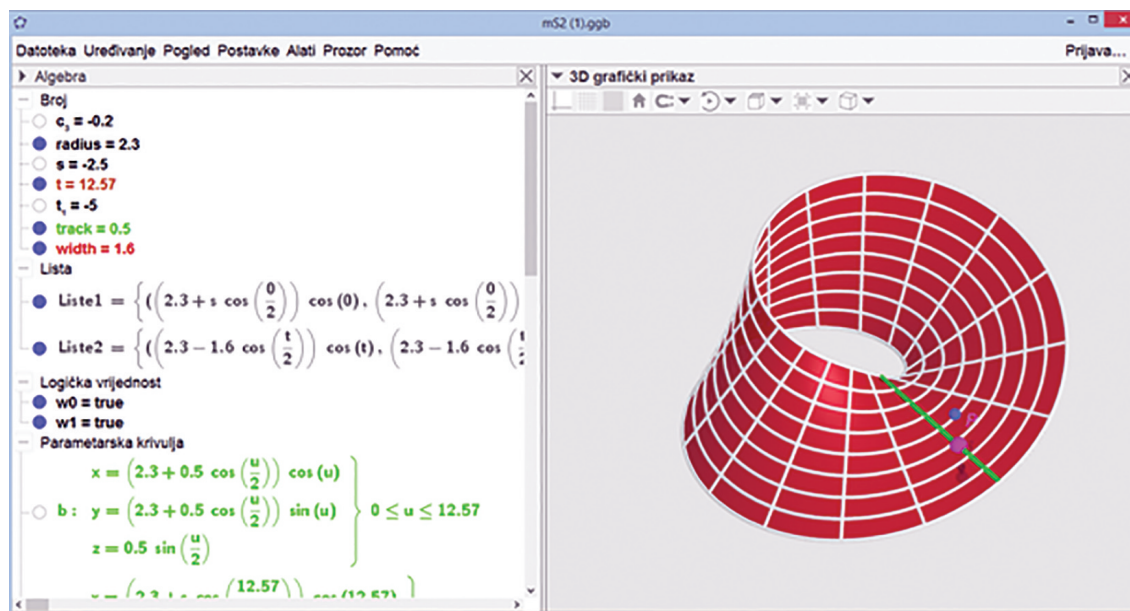
Izbor metoda i oblika rada u nastavi bitno je pitanje pa sam uz tradicionalni pristup podučavanju u kojem je nastavnik prenositelj znanja, a učenici pasivni primatelji kombinirala i druge tehnike s ciljem pokretanja učenika u smjeru aktivno-istraživačkog rada na projektu te poticanju kreativnog stvaralaštva i učenika i nastavnika. Na uvodnim satima kad su učenici prvi put vidjeli i koristili GeoGebbru podučila sam ih osnovnim elementima izrade interaktivnih sadržaja i postavila izazove. Tako je i započela naša avantura s GeoGebrom.

Tijekom radionica koristili smo mrežne stranice GeoGebre te materijale zajednice koje smo proučavali. Učenici su učeći od drugih shvatili kako ta zajednica funkcionira čineći danas njezin aktivni dio. Unaprijed planiranim i pripremljenim nizom aktivnosti upoznali su korisničko sučelje GeoGebre, zatim geometrijske alate, algebarski unos, naredbe, kao

i izbor različitih mogućnosti, a sve to kroz njima poznate različite matematičke teme koje pružaju mogućnost upoznavanja ovog bogatog softvera uz neizostavno samostalno istraživanje.

Na tom putu izmjenjivali smo uloge nastavnika i učenika te zajedno otkrivali nama dotada neslućene mogućnosti "kodiranja" u GeoGebri. U tehnici vođenja projekta uključeni su i praktični radovi (slika 3) kroz koje učenici samostalno istražujući (mijenjajući parametre) na geometrijskom prikazu jasno uočavaju njihovo stvarno značenje. Uz vizualnu i dinamičku predodžbu otkrivali su suštinsko poimanje problema.

Motiviranost bi zasigurno izostala da smo umjesto praktičnih radova preuzetih s <http://www.geogebra.org> koristili kompleksne analize npr. **Möbiusove trake** (vidi sliku 3, izmjena vrijednosti parametara **radius**, **track**, **width** pruža mogućnost vizualiziranja nastalih promjena i tog učinka na prikazani objekt). Time je potaknuto kod učenika (a i sebe same) otkrivanje novih matematičkih znanja i primjenu istih u svrhu rješavanja problema.



Slika 3. Praktični rad preuzet s mrežnih stranica GeoGebre "Möbiusove trake" kroz koji su se učenici upoznali s parametarski zadanim krivuljama

## Zaigrali smo se naredbom Niz

Ništa se ne može usporediti s ljepotom GeoGebrine sintakse. Dali smo si truda da vas uvjerimo (u slučaju da ne dijelimo mišljenje) u to. Krenut ću od najviše (misli se na ovaj projekt) korištene naredbe **Niz**, koja je u našim slučajevima nudila elegantna rješenja kao što su: postavljanje broja igrača ili ukrašavanje božićnog drvca.

Naredba **Niz[<izraz>,<varijabla i>,<početna vrijednost a>,<krajnja vrijednost b>,<korak povećanja>]** koristi se kad želimo stvoriti listu objekata dobivenih iz danog izraza upotrebom indeksa  $i$  koji se mijenja na intervalu od  $a$  do  $b$  s danim korakom povećanja.

$$L_1 = \text{Niz}(i, i, 1, 5, 1)$$

$$\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



```
pot=[]
for i in range(1,6):
    pot.append(i)
print(pot)
```

Slika 4. Stvori se niz brojeva od 1 do 5 – GeoGebrin kôd i Pythonov kôd.

$$L_1 = \text{Niz}(5^i, i, 1, 5, 1)$$

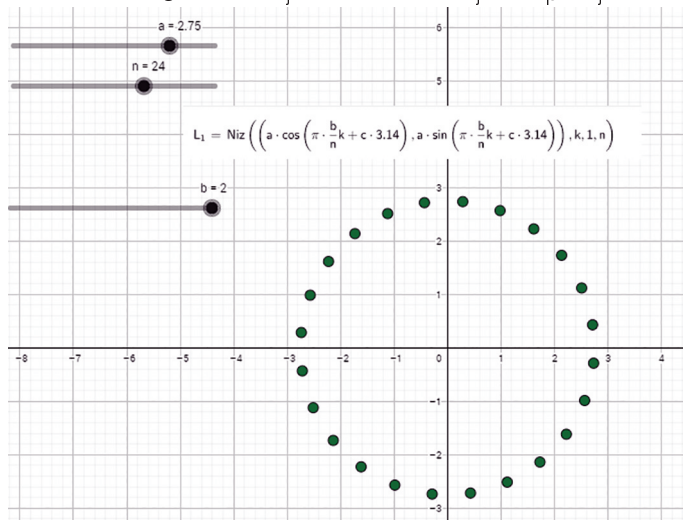
$$\rightarrow \{5, 25, 125, 625, 3125\}$$



```
s=5
pot=[]
for i in range(1,4):
    for j in range(1,i):
        s=s*s
    pot.append(s)
    s=5
print(pot)
```

Slika 5. Stvore se potencije broja 5 – GeoGebrin kôd i Pythonov kôd

Ova definicija naredbe nedvojbeno podsjeća na

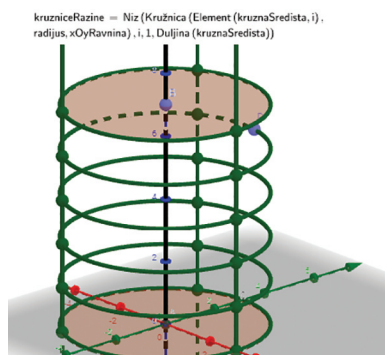


Slika 6. Učenički rad: Podjela kružnice na  $n$  točaka

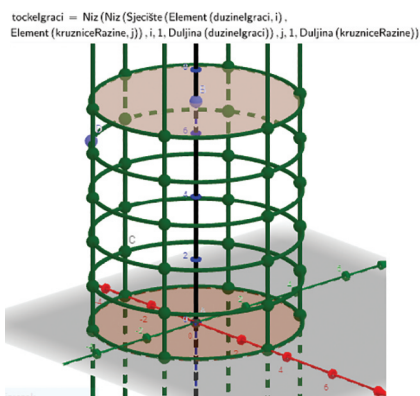
Mogućnosti geometrijskog prikaza sadržaja nizova potaknule su naše učenike na eksperimentiranje s njima.

Koliko smo oduševljeni lakoćom korištenja, programskim rječnikom rečeno “ugniježđenih **for** petlji”, zamalo smo sve poopćili i zaključili da se naredba **Niz** krije u rješenju skoro pa svakog problema. Ostale su otvorene mogućnosti eksperimentiranja s presjekom parametarskih krivulja što nas obvezuje na nastavak ovog projekta i na sljedeću školsku godinu.

Naredba **Niz(Kružnica(Element(kružnaSredista,i),radijus,xOyRavnina), i, 1, Duljina(kružnaSredista))** stvara niz kružnica koje su prikazane na slici 7.



Slika 7. Kružnice na valjku koriste se za postavljanje "prečki" iz igre Amida



Slika 8. Naredba `Niz` omogućava korisniku da postavi broj igrača proizvoljno, tvoreći vertikale iz igre Amida

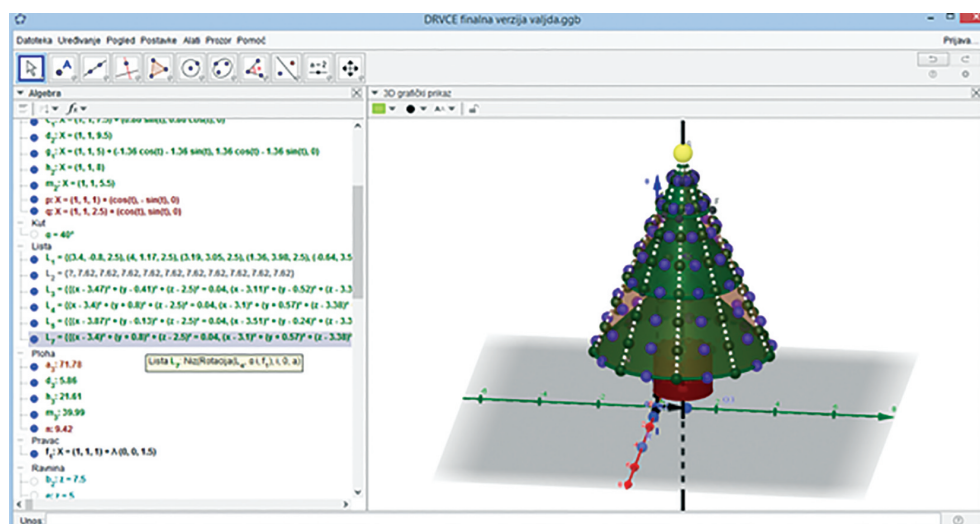
Njihov broj ovisi o vrijednosti klizača **kružnice**, a konstruirane su s pomoću elemenata niza **kružnaSredista** kao središta te polumjerima kao vrijednostima klizača **radijus**, a usporedne su s **xOyRavninom**.

Elementi niza **kružnaSredista** su točke na z-osi smještene između točaka **A** i **B** (dužina  $\overline{AB}$  je os valjka), a konstruirane su naredbom: `Niz(A+r(B-A), r, 0, 1,  $\frac{1}{\text{kružnice}+1}$ )`. Na ovaj način između **A** i **B** dobit ćemo točno onoliko središta koliko želimo kružnica konstruirati.

Ovaj model valjka služi za izradu geogebra verzije dječje japanske igre Amida o čemu više možete pročitati u sljedećem poglavlju.

## Od ideje do realizacije ili što smo napravili?

Datoteke s radovima i prateće knjige (dodatne GeoGebra datoteke, web-stranice s apletom, datoteke sa slikama) su dostupne online na <http://www.geogebra.org> na korisničkim računima autora. Njihova imena su spomenuta u sljedećim poglavljima.

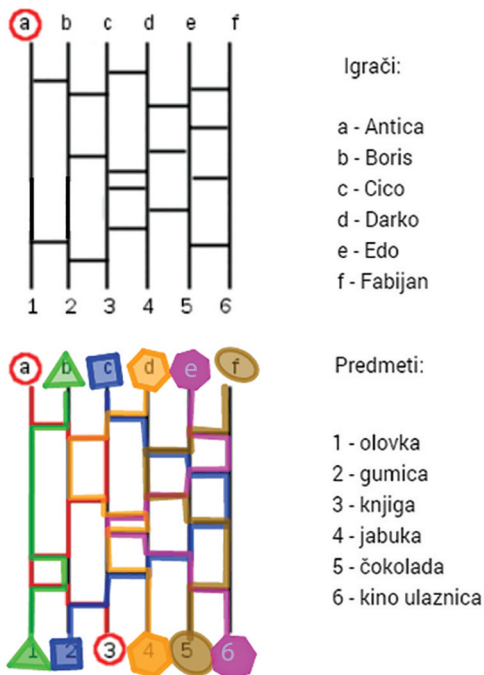


Slika 9. Nizom rotacija kreirane su kuglice na boru

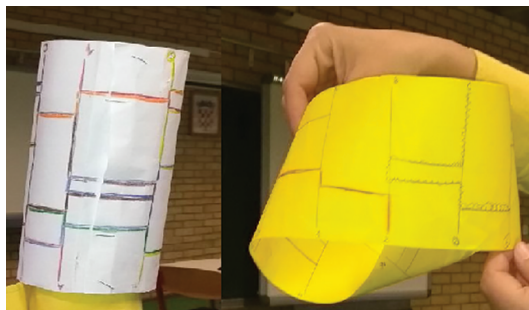
## Dječja japanska igra Amida

O ovoj igri pisao je naš uvaženi akademik Vladimir Devidé u svojoj knjizi "Čudesna matematika" gdje smo i pronašli inspiraciju za naš projekt.

Igra je popularna i igra se među djecom u Japanu kada žele podijeliti neke predmete među sobom. Ako u igri sudjeluje šestoro djece (na slici 10 označili smo samo početno slovo njihovih imena radi jednostavnosti prikaza) na listu papira nacrtaju se šest vertikalnih, usporednih dužina. Na vrhovima se upišu imena igrača (na slici 10 to su: a, b, c, d, e, f) u bilo kojem rasporedu, abecedno u našem slučaju. Na dnu se napišu imena predmeta koje dijele između sebe igrači (u našem slučaju to su brojevi koji predstavljaju oznaku predmeta) i također u bilo kojem poretku (u našem primjeru to je rastući niz brojeva). Svaki sudionik igre ucrtava nekoliko vodoravnih linija "prečki" koje spajaju dvije susjedne vertikale i može ih ucrtati **koliko želi** uz ograničenje da se **nikoje dvije** vertikalne linije



Slika 10. Dječja japanska igra Amida



Slika 11. Igra Amida na plaštu valjka i na Möubisovoj traci – raspodjela je jedinstvena (uvjerite se)

**ne smiju nastavljati** jedna na drugu horizontalno tj. nemaju zajedničku početnu/krajnju točku.

Kako odrediti što je koga zapalo? Slijedeći pravila igre raspodjela je jedinstvena, i nikada se ne može dogoditi da dva igrača dobiju isti predmet. Ako vam se to dogodi, dobro pogledajte gdje ste propustili slijediti pravila igre.

**Pravilo glasi:** da bi došao do svog predmeta svaki igrač krene niz svoju vertikalu do prve "prečke" pa s njom prijeđe na sljedeću vertikalu i niz nju se spušta do sljedeće "prečke" pa opet pređe na sljedeću vertikalu itd. sve dok ne stigne na donji kraj neke vertikale gdje se nalazi predmet koji mu pripada. Slika 10 predstavlja raspodjelu tako da je svaki igrač dobio svoju boju radi lakšeg uočavanja.

## Matematika igre Amida

Raspored sa slike 10 zapisat ćemo na sljedeći način:

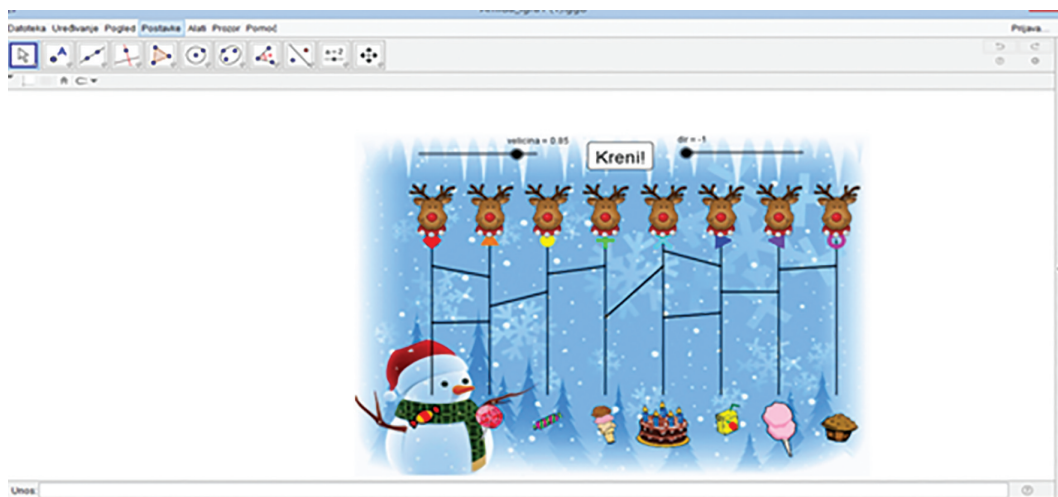
$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Čitajući prethodni zapis igrač "a" dobio je predmet "3", igrač "b" predmet "1", igrač "c" predmet "2", igrač "d" predmet "4", igrač "e" predmet "6", a igrač "f" predmet "5".

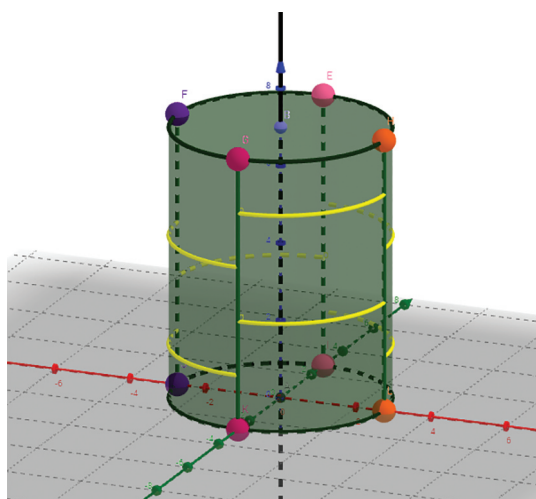
Ništa se bitno neće promijeniti ako i skup igrača (a,b,c,d,e,f) označimo sa (1,2,3,4,5,6). Tako dolazimo do zapisa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$





Slika 12. Demo verzija igre Amida u ravni pokreće se klikom na gumb "kreni". Tada svaki sob po pravilima igre kreće do svog slatkiša. Putanja po kojoj se sobovi kreću određena je pravilima igre, a predstavlja razlomljenu crtu u GeoGebri. (Autor igrice: Andrija Radica.)



Slika 13. Jedan od koraka u izradi GeoGebrine verzije igre Amida na plaštu valjka.

koji predstavlja jednu permutaciju skupa elemenata  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$  pa raspodjela predmeta odgovara nekoj permutaciji skupa  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ . Ako načinimo neku izmjenu u prethodnoj raspodjeli, npr. obrišemo neku prečku, to će odgovarati novoj permutaciji skupa  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ . Ukupan broj ishoda igre jednak je broju permutacija skupa od 6 elemenata  $(6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$ , u primjeru

sa slike 10. Ako imate vremena, namjestite prečke tako da dobijete sve mogućnosti raspodjele.

Ako je raspodjela predmeta među igračima permutacija, što je onda njena inverzna permutacija? Promotrimo obrnut postupak pa "krenemo" od predmeta prema pravilima igre "krećući" se prema gore. Zaključujemo da raspodjela ostaje ista, a zapis  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  predstavlja inverznu permutaciju gdje gornji brojevi predstavljaju predmete.

Kompozicija permutacija

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ako "stanemo" na bilo koju prečku i "krenemo" ulijevo ili udesno, dovoljno je na slici 10 samo pratiti boje i dobit ćemo putove dvaju sudionika. Svaka "prečka" prijeđe se točno dva puta. To vidimo i na slici 10 jer su prisutne po dvije boje na svakoj prečki (ne računa se crna jer to nije boja igrača).

Nakon upoznavanja s igrom, započeli smo daljnje istraživanje koje nas je (i još uvijek traje) vodilo matematičkim bespućima s GeoGebrom. Hrabro smo krenuli u izazove koje je u gore spomenutoj

knjizi akademik Devidé iznio, pa smo nakon što smo dokazali da podjela prema Amidi funkcionira i na plaštu valjka te na Möbiusovoj traci, krenuli sve to i realizirati u GeoGebri s krajnjim ciljem potpune automatizacije istih.

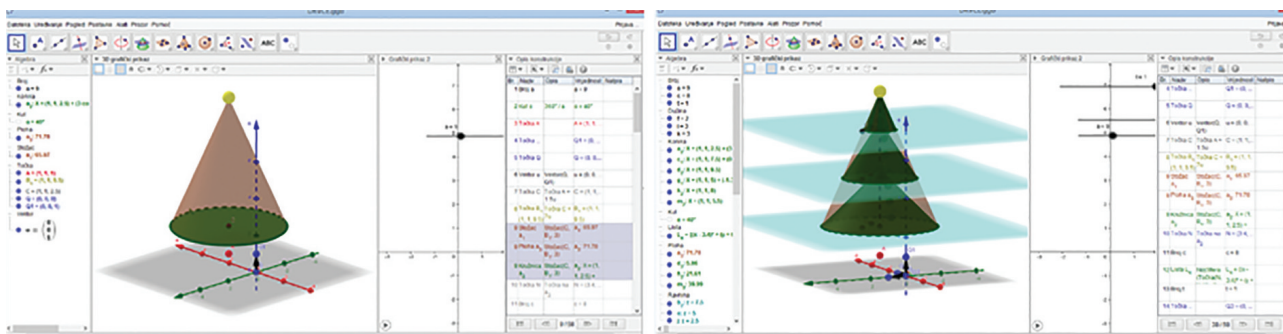
## S radionice "učenici za učenike"

### 3D božićno drveće (autor: Antonia Bartulović)

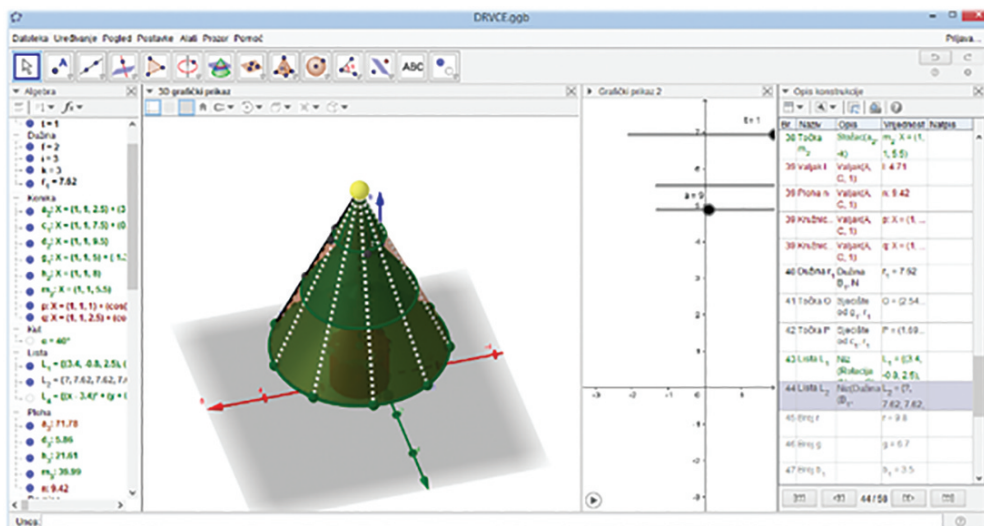
Naša avantura u GeoGebri obojila je novogodišnje praznike kreativnošću učenice Antonije Bartulović koja je ovom prilikom oslobodila i svoj umjetnički

dar. Evo kratke upute izrade božićnog drvca uz neizostavnu naredbu **Niz**.

Nakon stvaranja vektora vrijednosti 1 u smjeru osi  $z$ , s obzirom na točku **A** definirane su zavisne točke korištenjem istog. Presjekom ravnina usporednih s osnovnom ravninom određenom osima  $x$  i  $y$ , definiran je presjek već napravljenim stošcem i preko dobivenih točaka kreirani su manji stošci. Pritom se nije brisao originalni stožac. Deblo drvca predstavljeno je valjkom.



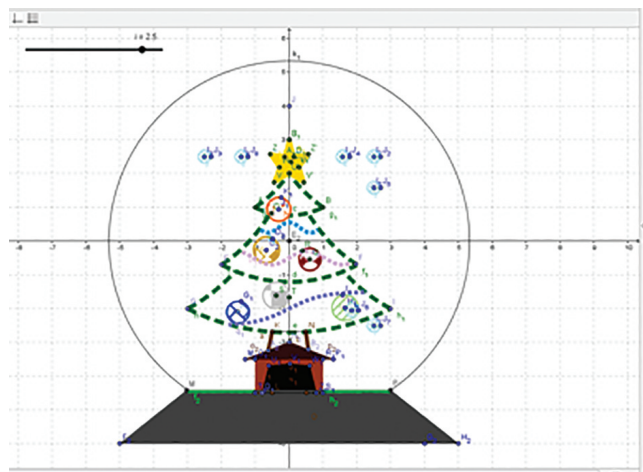
Slika 14. Stvaranje božićnog drvca od stožaca



Slika 15. Zahvaljujući već spomenutoj naredbi **Niz** spojen je vrh drvca nizom točaka rotiranih za kut  $\alpha$ , te dizajnirane dužine da odišu božićnim ugođajem.

### Božićno drvce (autor: Roko Lolić)

Obrisi bora u snježnoj 2D kugli napravljeni su s pomoću grafa eksponencijalne funkcije  $g(x) = 2^{(x+1)}$  ograničene (ovdje između  $-1$  i  $0$ ) te zrcaljene po osi  $y$ . Travnica je dio grafa sinus funkcije niske amplitude, svjetlozelene boje i velikog perioda ( $f_2(x) = \text{abs}(0.1 * \sin(50x)) - 4.5$ ). Također su ubačeni dijelovi grafova trigonometrijskih funkcija za vrpce oko bora. A šećer na kraju su pahuljice, čije se koordinate mogu mijenjati korištenjem klizača. Za zainteresirane sve je dostupno na [geogebra.org](http://geogebra.org).



Slika 16. Snježna kugla

## Umjesto zaključka

Matematika je jedna od rijetkih, ako ne i jedina, za koju vjerujemo da se u njoj čovjek ne može razočarati. Jer čovjek se sigurno može razočarati u nekoj ideologiji, u nekoj od novijih religija koje sad bujaju ili u program neke političke stranke. Može se također razočarati u prijatelja, u ljubavi i u ko-ječemu... Možda se može razočarati i u nekom matematičaru ili matematičarki, ali vjerujem da se u matematičari kao znanosti ne može razočarati. U izgradnji matematičkih teorija i u dokazivanju pojedinih matematičkih teorema ima toliko ljepote i elegancije, toliko spretnih, lijepih konstrukcija te mi se čini nemogućim da bi se čovjek mogao u tome ra-

zočarati, bar tako dugo dok mu mozak radi. Mislim da matematika ostaje granitni stup za koji se čovjek može uhvatiti kao za nešto sigurno i trajno kada se sve oko njega ruši.

Vladimir Devidé

### LITERATURA

- 1/ <http://geogebra.org>
- 2/ V. Devidé: "Čudesna matematika – pogled iznutra i izvana".



Slika 17. Školski tim GeoGebra: učenici Antonia Bartulović i Darko Vujica, profesorice Deana Bokšić i Julijana Novaković, te učenik Andrija Radica