

# Tko je prvi... definirao funkcije?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Danas je funkcija jedan od centralnih matematičkih pojmova te će vas stoga, vjerujemo, začuditi: definicija funkcije mlađa je od definicija derivacije, integrala, limesa, koordinatnog sustava ...

Dugo vremena ne možemo govoriti o pojmu funkcije u svijesti matematičara. Mnoge tablice iz doba Babilona i starog Egipta mogu se interpretirati kao tablice parova vrijednosti  $(x, f(x))$ , no nema naznaka da su stari autori imali ikakve začetak takvog razmišljanja.

U srednjem vijeku, u 14. stoljeću, kod Nicolasa Oresmea može se naći najstariji poznati primjer naznaka funkcijskog razmišljanja, u obliku grafičkih prikaza koji su prethodnici današnjeg grafa funkcije. O tome smo ponešto rekli u MiŠ-u broj 77, u članku *Tko je prvi grafički prikazao podatke?*.

Nakon otkrića analitičke geometrije u 17. stoljeću razni su matematičari interpretirali ovisnosti tipa  $y = f(x)$  kao krivulje u koordinatnom sustavu, no bez razmatranja tih ovisnosti kao funkcija. Međusobno ovisne veličine gledale su se kao parovi varijabli povezanih nekim pravilom.

Izraz "funkcija" prvi su 1673. u svom dopisivanju vezanom za temelje infinitezimalnog računa koristili Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. – 1716.) i Johann Bernoulli (1667. – 1748.). Johann Bernoulli je ujedno prvi koji je u jednom pismu Leibnizu pokušao definirati taj pojam. Tako on 1694. godine piše:

*Ovdje funkcijom varijable zovemo veličinu koja je na neki način sastavljena iz te varijable i konstanti.*

U toj je "definiciji" vidljivo ono što će dugo vremena ostati glavni problem – poistovjećenje funkcije s pravilom u obliku jedinstvene formule.

Prvi koji je pojam funkcije proglasio temeljnim za matematičku analizu bio je **Leonhard Euler** (1707.

– 1783.). U svom djelu *Institutiones calculi differentialis* (1755.) pokušao ga je precizirati i ponudio sljedeću "definiciju":

*Funkcija neke varijabilne veličine je analitički izraz koji je na neki način sastavljen iz te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.*



Slika 1. Švicarski matematičar Leonhard Euler (slika preuzeta sa [https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler) deklarirana kao *public domain*).

Iz ostatka Eulerova teksta vidljivo je da Euler pod "analitičkim izrazom" dozvoljava ne samo uobičajene formule, nego redove, beskonačne produkte i verižne razlomke. Kao zanimljivost spomenimo i to da je 1734. Euler prvi koristio notaciju  $f(x)$  za funkcijsku ovisnost.

Matematička analiza nastavila se intenzivno razvijati, a matematičari su pritom pod funkcijama podrazumijevali isto što i Euler – analitičke formule kojima su povezane dvije varijable.

Početkom 19. stoljeća, Augustin Louis Cauchy (1789. – 1857.) dao je prve zadovoljavajuće definicije limesa i derivacije, a pokušao je popraviti i Eulerovu definiciju funkcije. Cilj mu je bio dozvoliti i implicitno zadane funkcije te je tako 1821. napisao:

*Ako su varijabilne veličine međusobno tako povezane da, kad je zadan iznos jedne, iz nje se mogu odrediti iznosi ostalih, općenito se te različite veličine izražavaju preko te jedne, koja se onda naziva nezavisnom varijablom, a ostale veličine, koje su izražene preko nezavisne varijable, nazivaju se funkcijama te nezavisne varijable.*

Prvi kod koga se vide naznake moderne definicije bio je godinu kasnije, uslijed svog rada na prikazu funkcija s pomoću trigonometrijskih redova, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768. – 1830.):

*Općenito funkcija  $f(x)$  predstavlja niz iznosa ili ordinata, od kojih je svaka proizvoljna. Za beskonačno mnogo danih iznosa na apscisi  $x$  postoji jednak broj ordinata  $f(x)$ . Sve imaju određene brojčane iznose, pozitivne, negativne ili nula. Ne pretpostavljamo da te ordinate prate neko opće pravilo. One slijede jedna na drugu na bilo koji način i svaka je zadana kao da je jedina.*

Godina 1837. i 1838. nezavisno jedan od drugog Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805. – 1859.) i Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792. – 1856.) dali su definicije funkcija s domenom  $[a, b]$  koje su gotovo pa suvremene, ali zahvaljujući starinskom jeziku vrlo duge. Obojica pritom implicitno podrazumijevaju i neprekidnost, no lako ju je “maknuti” iz njihovih definicija. Ono što je važnije je da obojica jasno ističu da nije potrebno jedinstveno pravilo oblika  $y = f(x)$ , ali i obojica podrazumijevaju interpretaciju funkcije putem njezina grafa u koordinatnom sustavu.

Nakon što je tijekom 19. stoljeća otkriveno mnoštvo funkcija s neobičnim svojstvima (primjerice, Dirichletova koja ima prekid u svakoj točki iz  $[0, 1]$ ), **Hermann Hankel** (1839. – 1873.) je konačno 1870. definirao:

*Funkcija se naziva  $y$  od  $x$  ako svakom iznosu promjenjive veličine  $x$  unutar nekog intervala odgovara određeni iznos od  $y$ , neovisno o tome ovisi li  $y$  o  $x$*

*na čitavom intervalu po istom pravilu ili ne i neovisno o tome može li se ta ovisnost izraziti matematičkim operacijama ili ne.*



Slika 2. Njemački matematičar Hermann Hankel (slika preuzeta sa [https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann\\_Hankel](https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Hankel) deklarirana kao public domain).

Tu je definiciju 1923. godine na “školsku definiciju funkcije” sveo **Édouard Jean-Baptiste Goursat** (1858. – 1936.):

*y nazivamo funkcijom od  $x$ , ako svakom iznosu od  $x$  odgovara jedan iznos od  $y$ . Takva se veza iskazuje formulom  $y = f(x)$ .*



Slika 3. Francuski matematičar Édouard Goursat (slika preuzeta sa [https://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard\\_Goursat](https://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Goursat) deklarirana kao public domain).

Za kraj spomenimo da je potpuno apstraktnu definiciju pojma funkcije u terminima teorije skupova prvi 1960. dao Patrick Suppes (1922. – 2014.).