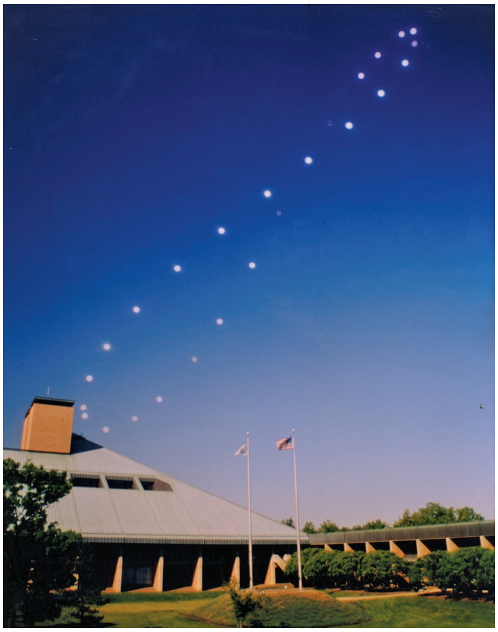
Sunčeva analema
i Bernoullijeva lemniskata

Sanja Sruk, Zagreb

Slika 1. Anthony Ayiomamitis: Analema iznad hrama boga Apolona, Korint, Grčka, (slika preuzeta uz dopuštenje autora, http://www.perseus.gr/Astro-Solar-Analemma-070000.htm)

Od davnina su ljudi bili fascinirani matematikom i njenom povezanošću s prirodom. Razvojem suvremenih znanosti, posebno fizike, značaj matematike postajao je sve očitiji jer se matematičkim jednadžbama mogu opisati pojave koje su ljudi uočavali i otkrivali u prirodi, poput elektriciteta, svjetlosti, magnetizma, radioaktivnosti... Fizičar i astronom Max Tegmark je rekao: "Naša realnost ne samo da je opisana matematikom – ona JE matematika u određenom smislu".



Slika 2. Jack Fishburn: Poslijepodnevna Sunčeva analema iznad zgrade Bell Labs, New Jersey, SAD, (slika preuzeta sa https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=54500812, CC BY-SA 3.0)

Sunčeva analema

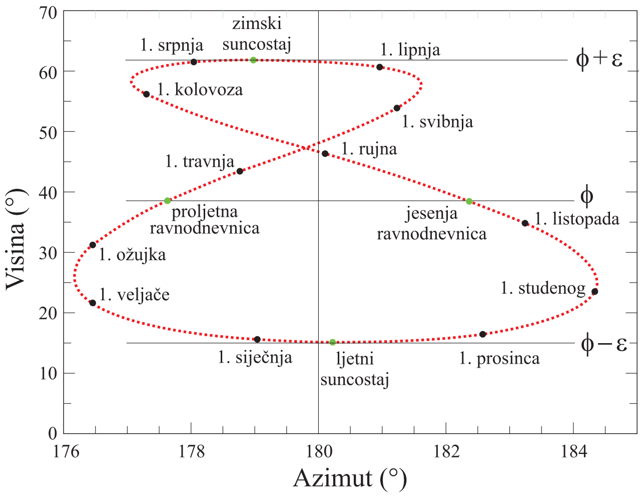
Jedna od matematičkih zanimljivosti koju susrećemo u prirodi svakako je **Sunčeva analema**. To je krivulja u obliku osmice koju u godini dana ocrtava položaj Sunca bilježen svakoga dana u isto

Sanja Sruk, prof. mat., 1. gimnazija, Zagreb, sanja.sruk1@gmail.com

vrijeme s istog mjesta. Zemljina revolucija (obilazak Zemlje oko Sunca) traje godinu dana i odvija se krivuljom koju zovemo **ekliptika**, a posljedica Zemljine revolucije je prividno gibanje Sunca među zvijezdama.

Na slici 3 vidi se analema u podne za griničko vrijeme (geografska širina: $51.48°$ sjeverno; geografska dužina: $0.0015°$ zapadno).

I Mjesec opisuje sličnu krivulju. U Sunčevoj i Mjesečevoj analemi prepoznajemo krivulju koja se zove **Bernoullijeva lemniskata**.



Slika 3. Analema u podne za griničko vrijeme

Bernoullijeva lemniskata

Bernoullijeva lemniskata je algebarska krivulja u obliku položene osmice, slična simbolu za beskonačnost. Ime joj potječe od latinske riječi *lemniscus*, što znači ukrasna vrpca.

1694. godine Jacob Bernoulli objavio je članak *Acta Eruditorom* u kojem razmatra analitička svojstva krivulje koja je po njemu dobila ime. Opisuje ju kao modifikaciju elipse, tj. kao skup točaka u ravnini kojima je umnožak udaljenosti do dvije čvrste točke konstantan ($|TF_1| \cdot |TF_2| = a^2$). Te čvrste točke se, kao i kod elipse, nazivaju fokusi i njihova udaljenost je $2a$ (ponegdje se u literaturi umjesto slova a koristi slovo e, pa je povezanost s elipsom još očitija). Jednadžba lemniskate je:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),$$

a u polarnim koordinatama:

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi,$$

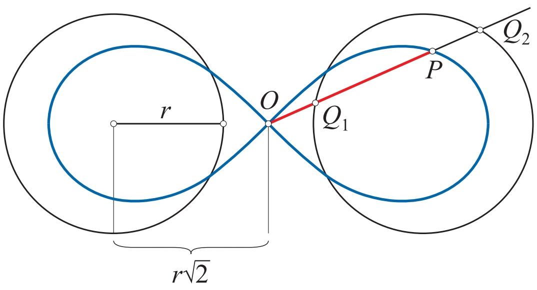
dok su njene parametarske jednadžbe:

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t+1} \quad \text{i} \quad y = \frac{a\sqrt{2}\cos t\sin t}{\sin^2 t+1}.$$

Ishodište je čvorna točka s tangentama $y = \pm x$, a ono je ujedno i točka infleksije. Sjecišta s osi x imaju koordinate $(\pm a\sqrt{2}, 0)$, a ekstremi su u točkama $\left(\pm\frac{a\sqrt{3}}{a}, \pm\frac{a}{2}\right)$. Površina svake petlje je a^2, a duljina lemniskate $l = 2\sqrt{2}a \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \approx 7.416a$.

Upravo su Bernoullijeva istraživanja duljine luka lemniskate postavila temelj kasnijem izučavanju eliptičkih funkcija i eliptičkih integrala koje je detaljnije proučavao Gauss početkom 19. stoljeća.

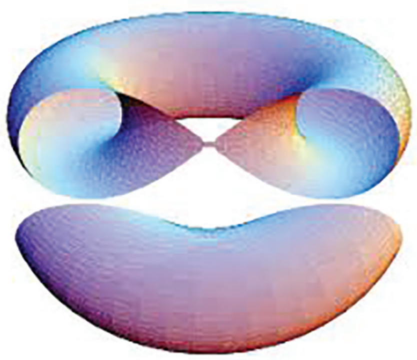
Jedan od načina kako se može nacrtati lemniskata je sljedeći: konstruiramo kružnicu i odaberemo točku O koja je od središta kružnice udaljena za $r\sqrt{2}$ (slika 4). Kroz O povučemo polupravac koji siječe kružnicu u točkama Q_1 i Q_2. Izmjerimo udaljenost tih dviju točaka, a zatim na polupravcu odredimo točku P koja je isto toliko udaljena od



Slika 4.

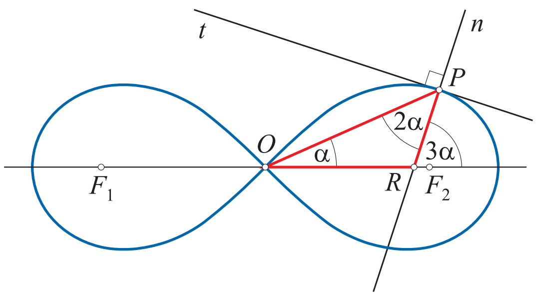
O, tj. $|OP| = |Q_1Q_2|$. Točka P leži na Bernoullijevoj lemniskati. Postupak ponavljamo za različite polupravce kroz O i tako dobijemo jednu petlju. Drugu dobijemo s pomoću osne simetrije ili tako da umjesto polupravaca crtamo pravce, pa u svakom koraku dobijemo po dvije, a ne samo jednu točku.

Bernoullijevu lemniskatu možemo dobiti i kao presjek torusa ravninom okomitom na njegov unutarnji rub (slika 5).

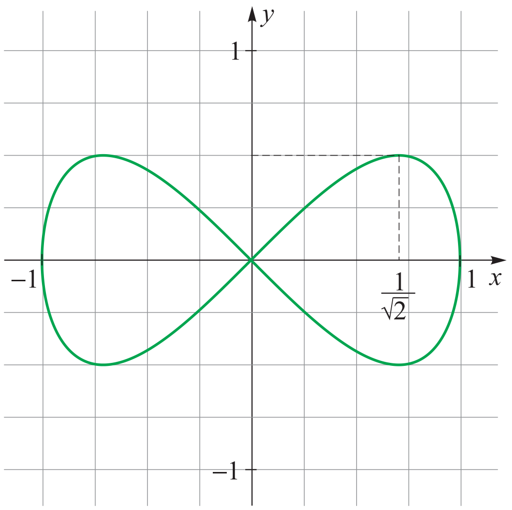


Slika 5.

Mnogi su matematičari proučavali svojstva Bernoullijeve lemniskate. Christoph Hermann Vechtman je 1843. otkrio zanimljivost vezanu uz kutove: ako neku točku P lemniskate (osim onih točaka koje leže na pravcu kroz fokuse) spojimo s ishodištem O, te povučemo normalu u točki P i njeno sjecište s osi kroz fokuse označimo sa R, onda je u trokutu ORP kut pri vrhu P dvostruko veći od kuta pri vrhu O (slika 6).



Slika 6.



Slika 7.

Bernoullijevoj lemniskati jako je slična *Geronova (ili Huygensova) lemniskata*. To je krivulja čija je jednadžba $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$. Na slici 7 prikazana je Geronova lemniskata za $a = 1$.

Primjena

Još je James Watt krajem 18. stoljeća za poboljšanje parnog stroja koristio napravu koja je u svom radu opisivala Bernoullijevu lemniskatu, a danas lemniskata i njene generalizirane verzije nalaze svoju primjenu u tzv. kvazi-jednodimenzionalnim modelima, od kojih je najpoznatiji model *Monte Carlo metoda*, široka skupina računalnih algoritama koji se oslanjaju na ponavljanje slučajnog uzorka za dobivanje numeričkih rezultata. Njihova osnovna ideja je da se uz pomoć slučajnih događaja rješavaju problemi koji mogu biti deterministički, a koriste se u optimizaciji, medicinskoj fizici i drugdje.

LITERATURA

1/ `https://hr.wikipedia.org/wiki/Analema`

2/ `https://en.wikipedia.org/wiki/Lemniscate_of_Bernoulli`