O jednoj dvostrukoj nejednakosti

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Dokazivanje nejednakosti u matematici predstavlja izuzetno zanimljiv posao koji s druge strane često može biti mukotrpan i kompliciran. Onima koji poznaju klasične nejednakosti, kao što su nejednakosti između sredina, te nejednakosti Cauchy-Schwarz-Buniakowskog, Čebiševa, Höldera, Minkowskog, Jensena, Bernoullija, Muirheada, Schura, Huygensa, Newton-Maclaurina i još neke, taj je posao sigurno lakši – lakše je dokazivati mnoge, na prvi pogled i teške nejednakosti. Evo jednog primjera.

U ovom ćemo se radu baviti dokazom dvostruke nejednakosti koja glasi:

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1, \quad (1)$$

gdje je $n \geq 2$ prirodan broj.

Prva ideja koja se ovdje javlja je da u dokazu pokušamo upotrijebiti matematičku indukciju. To nije nimalo lako, barem je takvo moje iskustvo kod dokazivanja sličnih nejednakosti s pomoću matematičke indukcije. Što napraviti, tj. što upotrijebiti za dokaz ove nejednakosti? Možda nećete odmah povjerovati kada vam kažem da ćemo iskoristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine ($A \geq G$).

1° Dokažimo prvo lijevu stranu dane nejednakosti (1). Na osnovu nejednakosti $A \geq G$ za n pozitivnih brojeva $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}$; imamo:

$$\frac{1}{n}\left(2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}\right) > \sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}},$$

a odavde

$$2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n} > n\cdot\sqrt[n]{n+1},$$

tj.

$$(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right) > n\cdot\sqrt[n]{n+1},$$

ili

$$n\cdot 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) > n\cdot\sqrt[n]{n+1},$$

odnosno

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > n\cdot\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)$$ ■

Napomenimo da ovdje vrijedi stroga nejednakost $A > G$ jer je $2 \neq \frac{3}{2} \neq \frac{4}{3} \neq \ldots \neq \frac{n+1}{n}$.

2° Dokažimo sada i desnu stranu dane nejednakosti (1). Opet ćemo iskoristiti nejednakost $A \geq G$ za n pozitivnih brojeva $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}$. Imamo:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right) > \sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}},$$

prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, **asefket@pmf.unsa.ba**

a odavde

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}>n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{n}},$$

tj.

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)>\frac{n}{\sqrt[n]{n}},$$

odnosno

$$1+(n-1)\cdot 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)>\frac{n}{\sqrt[n]{n}}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<n-\frac{n}{\sqrt[n]{n}}$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1$$

■

Naravno, i ovdje vrijedi stroga nejednakost $A>G$ jer je $1\neq\frac{1}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\ldots\neq\frac{n-1}{n}$.

Napomena. Harmonijskim brojevima nazivamo zbrojeve oblika:

$$H(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

sa svojstvom da je svaki pribrojnik, počevši od drugog, harmonijska sredina susjednih pribrojnika.

Za $n=10$ iz (1) dobivamo:

$$10\left(\sqrt[10]{11}-1\right)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}<10\left(1-\frac{1}{\sqrt[10]{10}}\right)+1,$$

a odavde zbog $\sqrt[10]{11}\approx 1.2709816$ dobivamo

$$10\left(\sqrt[10]{11}-1\right)\approx 10\cdot 0.2709816=2.709816,$$

te zbog $\sqrt[10]{10}\approx 1.2589254$ dobivamo

$$10\left(1-\frac{1}{\sqrt[10]{10}}\right)+1\approx 10(1-0.7943282)+1\approx 10\cdot 0.2056718+1=3.056718.$$

Dakle, slijedi

$$2.709816<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}<3.056718.$$

Inače je $H(10)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}=\frac{7381}{2520}\approx 2.9289683$.

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić (2006.): *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo.

2/ Š. Arslanagić (2015.): *Matematička čitanka 7*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo.