Sustavne liste ishoda
slučajnih pokusa u Excelu

Maja Starčević, Zagreb

U radu ćemo prikazati kako se u programu Excel mogu sastaviti sustavne liste ishoda slučajnih pokusa na temelju kojih možemo izračunati vjerojatnosti zadanih događaja.

Excel kao program za izradu proračunskih tablica pruža nam mogućnost da jednostavno sastavimo sustavnu listu svih mogućih ishoda nekog slučajnog događaja. Da bismo ispisali takve liste, možemo iskoristiti formule koje se temelje na funkcijama za izračunavanje (nepotpunog) kvocijenta i ostatka pri dijeljenju cijelih brojeva. Kako Excel ima ugrađen cijeli niz dodatnih funkcija, omogućeno nam je i lako ispitivanje koji su od ishoda iz dobivene liste povoljni za neki događaj, a koji ne. Uz pomoć sustavne liste ishoda možemo stoga lako izračunati vjerojatnost promatranog događaja te dobiti prikaz svih povoljnih ishoda za taj događaj. Iako se u nastavi matematike vjerojatnost izračunava uz pomoć kombinatorike, ovakav način izračuna koristan je jer je često brži, smanjuje mogućnost pogreške, odnosno nudi mogućnost provjere dobivenih rezultata. Dakle, kao i u mnogim drugim primjerima iz nastavne prakse, poželjno je kombinirati ta dva pristupa te iskoristiti prednosti svakog od njih.

Pogledat ćemo sastavljanje liste ishoda i računanje vjerojatnosti na nekoliko primjera.

Primjer 1. *Bacamo dvije kocke na kojima pišu brojevi od 1 do 6. Ista je vjerojatnost da će se na gornjoj strani kocke pojaviti bilo koji od 6 brojeva. Kolika je vjerojatnost da je nakon bacanja zbroj brojeva na kockama djeljiv s 2?*

Rješenje. Zadatak za početak možemo riješiti bez uporabe računala. Pogledajmo koliko je ishoda kod kojih na kockama imamo zbroj brojeva koji je djeljiv s 2. Ako je na prvoj kocki neparan broj, da bismo imali paran zbroj, na drugoj kocki mora također biti neparan broj. Na drugoj kocki mogu biti 3 takva broja. Slično zaključujemo i ako je broj na prvoj kocki paran. Na drugoj kocki tada mora biti opet paran broj te imamo također tri mogućnosti. Dakle, za svaki broj na prvoj kocki imamo tri moguća broja na drugoj koja će dati povoljan ishod te konačno zaključujemo da je broj povoljnih ishoda jednak $6 \cdot 3 = 18$. Kako je ukupno $6 \cdot 6 = 36$

doc. dr. sc. Maja Starčević, Zavod za primijenjenu matematiku, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, mstarcev@math.hr

ishoda bacanja, vjerojatnost da je zbroj brojeva na kockama paran jednaka je $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Rješenje možemo provjeriti i u Excelu sastavljanjem sustavne liste ishoda. U prvi redak stavljamo opise stupaca (slika 1). Nakon toga u prva dva stupca upisujemo brojeve na sljedeći način. U prvi stupac, odnosno u stupac A, upisujemo broj koji se može nalaziti na prvoj kocki, dok u drugi stupac, odnosno stupac B, upisujemo broj koji se može nalaziti na drugoj kocki. Drugim riječima, ispisujemo sve moguće kombinacije dvaju brojeva od 1 do 6 (s ponavljanjem). Dakle, imamo 6 redaka s brojem 1 u prvom stupcu i brojevima od 1 do 6 u drugom stupcu. Zatim imamo 6 redaka s brojem 2 u prvom stupcu, te opet brojeve od 1 do 6 na odgovarajućim mjestima u drugom stupcu. Taj postupak nastavljamo dok ne dobijemo 36 redaka s brojevima.

Upisivanje brojeva možemo naravno ubrzati kopiranjem nekih vrijednosti. Medutim, možemo promotriti i strukturu upisanih brojeva te zaključiti da se tražena dva stupca mogu vrlo jednostavno ispisati ako u prve dvije ćelije drugog retka upišemo sljedeće formule. U ćeliju A2 upišemo formulu

```
=QUOTIENT(ROW()-2;6)+1,
```

dok u ćeliju B2 upisujemo formulu

```
=MOD(ROW()-2;6)+1.
```

Obje formule povučemo do 37. retka. Pritom je funkcija `ROW` funkcija koja daje broj retka u kojem se upisuje formula te ne prima nijedan argument. Funkcije `QUOTIENT` i `MOD` primaju dva argumenta (djeljenik i djelitelj). Prva od njih daje nepotpuni kvocijent pri dijeljenju ta dva broja, a druga daje ostatak. Formule smo dakle dobili povezivanjem rednih brojeva redaka s kvocijentima i ostatcima pri dijeljenju sa 6. Pomak za 2 u formulama dolazi zbog toga što formule upisujemo od drugog retka. Formulu dakle možemo upisivati i počevši iz nekog drugog retka, ali onda moramo prilagoditi pomak. Na slici 2 vidimo kako se postupno izračunavaju vrijednosti po prvoj formuli.

Nakon što smo sastavili listu ishoda, u stupcu C ispitujemo koji su ishodi povoljni (slika 2). Potrebno je stoga ispitati je li zbroj brojeva u prva dva stupca paran. To postižemo upisivanjem formule

```
=IF(MOD(A2+B2;2)=0;"da";"ne")
```

	A	B	C	D	E
1	Prva kocka	Druga kocka	Povoljan ishod?	Broj povoljnih ishoda	
2	1	1	da	18	
3	1	2	ne		
4	1	3	da		
5	1	4	ne		
6	1	5	da		
7	1	6	ne		
8	2	1	ne		
9	2	2	da		
10	2	3	ne		
11	2	4	da		
12	2	5	ne		
13	2	6	da		
14	3	1	da		
15	3	2	ne		
16	3	3	da		
17	3	4	ne		
18	3	5	da		
19	3	6	ne		
20	4	1	ne		
21	4	2	da		
22	4	3	ne		
23	4	4	da		
24	4	5	ne		
25	4	6	da		
26	5	1	da		
27	5	2	ne		
28	5	3	da		

Slika 1.

	A	B	C	D	E
1	ROW()	ROW()-2	QUOTIENT(ROW()-2;6)	QUOTIENT(ROW()-2;6)+1	
2	2	0	0	1	
3	3	1	0	1	
4	4	2	0	1	
5	5	3	0	1	
6	6	4	0	1	
7	7	5	0	1	
8	8	6	1	2	
9	9	7	1	2	
10	10	8	1	2	
11	11	9	1	2	
12	12	10	1	2	
13	13	11	1	2	
14	14	12	2	3	
15	15	13	2	3	
16	16	14	2	3	
17	17	15	2	3	
18	18	16	2	3	
19	19	17	2	3	
20	20	18	3	4	
21	21	19	3	4	
22	22	20	3	4	
23	23	21	3	4	
24	24	22	3	4	
25	25	23	3	4	
26	26	24	4	5	
27	27	25	4	5	
28	28	26	4	5	

Slika 2.

u ćeliju C2 te povlačenjem iste do 37. retka. Sada možemo prebrojiti sve povoljne ishode tako da u ćeliju D2 upišemo formulu

`=COUNTIF(C2:C37;"da")`.

Dobivamo 18 povoljnih ishoda. Podijelimo li taj broj s brojem svih ishoda, dobivamo vjerojatnost $\frac{1}{2}$, što odgovara rezultatu do kojeg smo došli bez računala.

U nastavku ćemo riješiti još nekoliko zadataka samo uz pomoć Excela.

Primjer 2. *Opet bacamo dvije kocke, ali na jednoj od njih su izblijedjele neke točke. Tako je broj* 3 *postao broj* 1, *a broj* 4 *broj* 2. *Sada računamo vjerojatnost događaja u kojem na kockama dobivamo dva broja čiji je zbroj djeljiv s* 3 *ili je veći od* 4.

Rješenje. Sustavnu listu ishoda je sad najlakše sastaviti tako da prvo označimo strane kocaka brojevima od 1 do 6, i tek kasnije razmišljamo o tome koliko na tim stranama ima točaka. Naime, vjerojatnost da kocka padne na bilo koju od strana je za obje kocke i dalje jednaka $\frac{1}{6}$, neovisno o tome koliko na njoj ima točaka. Prema tome sustavna lista dobivenih rednih brojeva strana je u potpunosti jednaka listi iz prethodnog zadatka (slika 3). Sada prelazimo na dodjeljivanje broja točaka svakoj od strana. Kod prve kocke se ništa ne mijenja, uz pretpostavku da smo strane označili u skladu s brojem točaka koje se nalaze na njima. Kod druge kocke imamo drukčiju situaciju. Na nekim stranama imamo isti broj točaka. Stoga sastavimo pravilo pridruživanja broja točaka rednom broju odgovarajuće strane kocke. Neka se redni broj strane poduadara s originalnim brojem točaka (prije nego su neke od njih izblijedjele), pa je prema tome pridruživanje dano s

$$1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 5, 6 \mapsto 6.$$

U Excelu to pridruživanje možemo napraviti vrlo jednostavno. Zapišemo redne brojeve strana druge kocke u G stupac od ćelije G2 do G7 te pripadne brojeve točaka u H stupac na odgovarajuća mjesta. Zatim u C2 ćeliju upišemo formulu

`=LOOKUP(B2;$G$2:$H$7)`.

Primijetimo da smo raspon ćelija G2:H7 fiksirali (s pomoću znakova $) jer se on ne smije promijeniti pri povlačenju formule. Sad u stupcu C imamo brojeve koji odgovaraju broju točaka koje imamo na drugoj kocki. Nakon toga koristimo se logičkom funkcijom `OR` za provjeru zadanog uvjeta. U ćeliju D2 upisujemo formulu `=IF(OR(MOD(A2+C2;3)=0;A2+C2 > 4);"da";"ne")`, a u ćeliji E2 prebrojimo sve povoljne ishode s

`=COUNTIF(D2:D37;da)`.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Redni broj strane prve kocke = broj na prvoj kocki	Redni broj strane druge kocke	Broj na drugoj kocki	Povoljan ishod?	Broj povoljnih ishoda		Pravilo zamjene	
2	1	1	1	ne	30		1	1
3	1	2	2	da			2	2
4	1	3	1	ne			3	1
5	1	4	2	da			4	2
6	1	5	5	da			5	5
7	1	6	6	da			6	6
8	2	1	1	da				
9	2	2	2	ne				
10	2	3	1	da				
11	2	4	2	ne				
12	2	5	5	da				
13	2	6	6	da				
14	3	1	1	ne				
15	3	2	2	da				
16	3	3	1	ne				
17	3	4	2	da				
18	3	5	5	da				
19	3	6	6	da				
20	4	1	1	da				
21	4	2	2	da				
22	4	3	1	da				

Slika 3.

Dobivamo 30 pa je tražena vjerojatnost jednaka $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$. Lako je vidjeti (ako ponovimo postupak sa stupcima A i B) da ukoliko bacamo dvije kockice sa standardnim brojem točaka, vjerojatnost istog događaja je nešto veća, preciznije, jednaka je $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$.

Primjer 3. *U kutiji se nalazi pet kartica sa slovima A, A, B, B, C. Kolika je vjerojatnost da izvlačenjem dvije kartice (jedna za drugom, bez gledanja) dobijemo ista slova ako*

a) *nakon prvog izvlačenja vraćamo karticu u kutiju*

b) *nakon prvog izvlačenja ne vraćamo karticu u kutiju?*

Rješenje.

a) Kartice prvo numeriramo brojevima od 1 do 5 te formiramo sustavnu listu ishoda s pomoću rednih brojeva kartica (slika 4). Dakle, u ćelije A2 i B2 trebamo zapisati formule

`=QUOTIENT(ROW()-2;5)+1`, te

`=MOD(ROW()-2;5)+1`.

Zatim u C2 i D2 ćelijama napravimo zamjenu brojeva slovima s pomoću formula

`=LOOKUP(A2;$G$2:$H$6)` i

`=LOOKUP(B2;$G$2:$H$6)`,

s tim da je u rasponu ćelija G2:H6 dano pravilo pridruživanja

$$1 \mapsto A, 2 \mapsto A, 3 \mapsto B, 4 \mapsto B, 5 \mapsto C.$$

Sada u E2 ćeliju upišemo formulu koja ispituje jesmo li izvukli ista slova

`=IF(C2=D2;"da";"ne")`.

Sve formule povučemo do 26. retka. U F2 ćeliju upišemo formulu

`=COUNTIF(E2:E26;"da")`

za prebrojavanje povoljnih ishoda. Dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka $\frac{9}{25}$.

b) Da bismo napravili sustavnu listu ishoda u ovom slučaju, možemo iskoristiti sustavnu listu iz prethodnog dijela zadatka. Kopiramo prvo tu listu u isti raspon ćelija u novom listu datoteke. Sada u C2 ćeliji upišemo formulu

`=IF(A2=B2;"da";"ne")`

kojom ispitujemo jesu li dvije kartice jednake. Iz liste svih ishoda želimo izbaciti sve ishode u kojima dobivamo iste kartice. Označimo stoga neprazne ćelije u A, B i C stupcu. Koristeći se opcijom Filter (vidi napomenu 1) filtriramo po-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Redni broj prve izvučene kartice	Redni broj druge izvučene kartice	Slovo na prvoj kartici	Slovo na drugoj kartici	Povoljan ishod?	Broj povoljnih ishoda	Pravilo zamjene		
2	1	1	A	A	da	9	1	A	
3	1	2	A	A	da		2	A	
4	1	3	A	B	ne		3	B	
5	1	4	A	B	ne		4	B	
6	1	5	A	C	ne		5	C	
7	2	1	A	A	da				
8	2	2	A	A	da				
9	2	3	A	B	ne				
10	2	4	A	B	ne				
11	2	5	A	C	ne				
12	3	1	B	A	ne				
13	3	2	B	A	ne				
14	3	3	B	B	da				
15	3	4	B	B	da				
16	3	5	B	C	ne				
17	4	1	B	A	ne				
18	4	2	B	A	ne				
19	4	3	B	B	da				
20	4	4	B	B	da				
21	4	5	B	C	ne				
22	5	1	C	A	ne				
23	5	2	C	A	ne				
24	5	3	C	B	ne				
25	5	4	C	B	ne				

Slika 4.

datke ostavljajući samo retke koji imaju vrijednost `"ne"` u C stupcu. Na taj način dobivamo traženu sustavnu listu ishoda (slika 5) koja se sastoji od 20 redaka. Ponovimo postupak iz a) dijela zadatka s takvom listom ishoda i dobivamo 4 povoljna ishoda od 20 mogućih te je vjerojatnost u ovom slučaju jednaka $\frac{1}{5}$.

Filtriranjem podataka po E stupcu možemo jednostavno dobiti pregled svih povoljnih ishoda za promatrani događaj.

Napomena 1. *Zadane retke filtriramo po kriteriju vrijednosti u nekom stupcu tako da ih prvo označimo i nakon toga pritisnemo opciju Filter. Zatim odaberemo stupac u kojem se nalaze vrijednosti u odnosu na koje filtriramo retke i u dobivenom okviru označimo samo vrijednosti iz tog stupca koje nam odgovaraju. Nakon filtriranja podataka, dobivene je retke potrebno kopirati i zalijepiti ih u neki raspon ćelija koji ne sadrži retke koji su sudjelovali u filtriranju. Filter nakon toga poništavamo ponovnim odabirom opcije Filter. Nakon brisanja originalne liste možemo premjestiti novu listu ishoda u početne retke stupaca A i B, odnosno na mjesto gdje se nalazila originalna lista.*

Primjer 4. U kutiji se nalaze četiri kartice na kojima pišu slova A, B, C, D. Izvlačimo tri puta po jednu karticu i zapisujemo redom slova. Pritom ne vraćamo kartice u kutiju. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli slova poredana po abecedi?

Rješenje. Prvo ćemo napraviti sustavnu listu ishoda koja odgovara izvlačenju tri kartice s vraćanjem kartica u kutiju (slika 6) pa ćemo filtriranjem, kao u prethodnom primjeru, izbaciti nepotrebne retke iz te liste. S obzirom na to da ovaj put moramo sastaviti kombinacije od triju brojeva, napravit ćemo malu modifikaciju dosadašnjih formula, odnosno osmisliti još jednu formulu. I ove se formule mogu vrlo lako prilagoditi pokusima s drukčijim brojem objekata. Označimo dakle kartice redom brojevima od 1 do 4. U A2 ćeliju upisujemo formulu

`=QUOTIENT(ROW()-2;16)+1`.

U B2 ćeliju upišemo

`=QUOTIENT(MOD(ROW()-2;16);4)+1`,

dok je u C2 ćeliju potrebno upisati

`=MOD(ROW()-2;4)+1`.

Potrebno je formirati $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ redaka stoga sve formule povučemo do 65. retka. U D2 ćeliju unesemo formulu za ispitivanje jesu li neke dvije kartice jednake:

`=IF(OR(A2=B2; A2=C2; B2=C2);"da";"ne")`.

Filtriranjem izbacimo iz sustavne liste retke koji u D stupcu imaju `"da"` te dobivamo traženu sustavnu listu ishoda koja se sastoji od 24 redaka.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Redni broj prve izvučene kartice	Redni broj druge izvučene kartice	Slovo na prvoj kartici	Slovo na drugoj kartici	Povoljan ishod?	Broj povoljnih ishoda	Pravilo zamjene		
2	1	2	A	A	da	4	1	A	
3	1	3	A	B	ne		2	A	
4	1	4	A	B	ne		3	B	
5	1	5	A	C	ne		4	B	
6	2	1	A	A	da		5	C	
7	2	3	A	B	ne				
8	2	4	A	B	ne				
9	2	5	A	C	ne				
10	3	1	B	A	ne				
11	3	2	B	A	ne				
12	3	4	B	B	da				
13	3	5	B	C	ne				
14	4	1	B	A	ne				
15	4	2	B	A	ne				
16	4	3	B	B	da				
17	4	5	B	C	ne				
18	5	1	C	A	ne				
19	5	2	C	A	ne				
20	5	3	C	B	ne				
21	5	4	C	B	ne				

Slika 5.

	A	B	C	D	E
1	Prva kartica	Druga kartica	Treća kartica	Dvije kartice su jednake?	
2	1	1	1	da	
3	1	1	2	da	
4	1	1	3	da	
5	1	1	4	da	
6	1	2	1	da	
7	1	2	2	da	
8	1	2	3	ne	
9	1	2	4	ne	
10	1	3	1	da	
11	1	3	2	ne	
12	1	3	3	da	
13	1	3	4	ne	
14	1	4	1	da	
15	1	4	2	ne	
16	1	4	3	ne	
17	1	4	4	da	
18	2	1	1	da	
19	2	1	2	da	
20	2	1	3	ne	
21	2	1	4	ne	
22	2	2	1	da	
23	2	2	2	da	
24	2	2	3	da	
25	2	2	4	da	
26	2	3	1	ne	
27	2	3	2	da	

Slika 6.

Neka je dobivena lista opet u početnim redcima stupaca A-C (slika 7). S pomoću pravila zamjene, koje se nalazi u rasponu ćelija J2:K5, i funkcije `LOOKUP` zamijenimo brojeve odgovarajućim slovima i zapišemo dobivena slova u stupce D-F. Konačno ispitujemo jesu li slova u dobrom poretku. U G2 ćeliju upisujemo formulu

```
=IF(AND(D2 < E2; E2 < F2);"da";"ne").
```

Za prebrojavanje povoljnih ishoda opet se možemo koristiti `COUNTIF` funkcijom te dobivamo samo 4 povoljna ishoda pa je vjerojatnost promatranog događaja jednaka $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

Zaključak

U radu su prikazani zadatci od kojih neke možemo bez većih poteškoća riješiti i kombinatornim zaključivanjem, odnosno bez pomoći računala. Međutim, Excel nam i kod takvih zadataka može poslužiti za provjeru rezultata. Kako se uvjeti na događaj kojem računamo vjerojatnost sve više otežavaju, primjena Excela dobiva na važnosti. Uporaba računala u nastavi vjerojatnosti može uz to pridonijeti i dodatnoj motivaciji učenika, a učenicima koji se teže snalaze u kombinatornom načinu razmišljanja pomoći da ipak dođu do rezultata.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Redni broj prve kartice	Redni broj druge kartice	Redni broj treće kartice	Slovo na prvoj kartici	Slovo na drugoj kartici	Slovo na trećoj kartici	Povoljan ishod?	Broj povoljnih ishoda		Pravilo zamjene	
2	1	2	3	A	B	C	da	4		1	A
3	1	2	4	A	B	D	da			2	B
4	1	3	2	A	C	B	ne			3	C
5	1	3	4	A	C	D	da			4	D
6	1	4	2	A	D	B	ne				
7	1	4	3	A	D	C	ne				
8	2	1	3	B	A	C	ne				
9	2	1	4	B	A	D	ne				
10	2	3	1	B	C	A	ne				
11	2	3	4	B	C	D	da				
12	2	4	1	B	D	A	ne				
13	2	4	3	B	D	C	ne				
14	3	1	2	C	A	B	ne				
15	3	1	4	C	A	D	ne				
16	3	2	1	C	B	A	ne				
17	3	2	4	C	B	D	ne				
18	3	4	1	C	D	A	ne				
19	3	4	2	C	D	B	ne				
20	4	1	2	D	A	B	ne				
21	4	1	3	D	A	C	ne				
22	4	2	1	D	B	A	ne				
23	4	2	3	D	B	C	ne				
24	4	3	1	D	C	A	ne				

Slika 7.