Jedan matematički zadatak
talijanskog matematičara Luce Paciolija

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

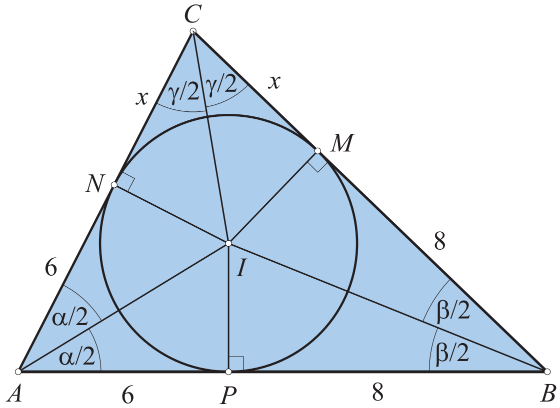
Jacopo de' Barbari (1460/1470. - prije 1516.): portret Luce Paciolija s učenikom (vjerojatno Guidobaldom da Montefeltrom), izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pacioli.jpg`

Arapska matematika posebno je utjecala na pojavu djela *Liber Abaci* (1202.) koje je napisao Leonardo iz Pise (oko 1176. – oko 1240.) poznatiji kao Fibonacci. Nakon tri stoljeća vrlo slabog interesa za algebarske i aritmetičke probleme, u 15. stoljeću dolazi do obnove pogleda iznesenih u djelu Leonarda iz Pise. To se posebno očitovalo pojavom talijanskog matematičara Luce Paciolija (fra Bartolomeo Luca de Pacioli-Borgo San Sepolero, oko 1445. – oko 1517.), franjevca (poznatom i po imenu fra Luka). Bio je prijatelj i suradnik velikog talijanskog znanstvenika Leonarda da Vincija (1452.–1519.). Izdao je 1494. godine knjigu *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* koja je dugo ostala udžbenikom matematike (poznata po skraćenom nazivu *Summa* ili *Sve o matematici*). U toj knjizi je i detaljan opis sustava dvojnog knjigovodstva. U drugom značajnom djelu iz 1496. godine *O božanskom razmjeru* (*De divina proportione*) razmatrao je matematičke probleme zlatnog reza (*sectio aurea*). Recimo i to da je Luca Pacioli preveo na talijanski jezik i izdao 1500. godine čuveno djelo *Elementi* velikog starogrčkog matematičara Euklida (oko 340. – oko 287. prije Krista).

U ovom članku ćemo dati dva različita rješenja jednog zadatka iz geometrije trokuta koji se u matematičkoj literaturi često naziva kao zadatak Luce Paciolija, a koji glasi:

Polumjer kruga upisanog u trokut iznosi 4. Jedna dodirna točka dijeli stranicu trokuta na odsječke duljina 6 i 8. Odredite duljine stranica trokuta.

Rješenje 1. Neka je dan trokut ΔABC čiji su kutovi $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$ i $\sphericalangle C = \gamma$ (slika 1).



Slika 1.

Imamo da je $|AP| = |AN| = 6$, $|BP| = |BM| = 8$ te $|CM| = |CN| = x$ (tangentne dužine). Sada slijedi iz trokuta ΔAIP, ΔBIM i ΔCIN (gdje je

prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, `asefket@pmf.unsa.ba`

točka I središte trokutu upisane kružnice):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

Kako je $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, slijedi da je $90^\circ-\frac{\gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, te vrijedi jednakost:

$$\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right),$$

odnosno

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \qquad (2)$$

Sada iz (1) i (2) dobivamo:

$$\frac{x}{4}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{x}{4}=\frac{7}{4},$$

$$x=7,$$

pa su stranice trokuta ΔABC: $a=15$, $b=13$ i $c=14$.

Rješenje 2. Koristit ćemo se Heronovom[1] formulom za površinu trokuta koja glasi:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (3)$$

gdje je $s=\frac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta ΔABC, kao i formulom za polumjer kruga upisanog u taj trokut:

$$r=\frac{P}{s} \qquad (4)$$

U našem slučaju imamo:

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{8+x+6+x+6+8}{2}=14+x,$$

$$s-a=14+x-(x+8)=6,$$

$$s-b=14+x-(x+6)=8,$$

$$s-c=14+x-(6+8)=x.$$

Slijedi sada iz (3) i (4):

$$r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s},$$

tj.

$$4=\frac{\sqrt{(14+x)\cdot 6\cdot 8\cdot x}}{14+x}$$

ili

$$4=\sqrt{\frac{6\cdot 8\cdot x}{14+x}}$$

te

$$16=\frac{48x}{14+x},$$

a odavde

$$1=\frac{3x}{14+x},$$

$x=7$, tj.

$$a=15,\quad b=13 \quad \text{i} \quad c=14.$$

Na kraju recimo i to da najvjerojatnije drugo rješenje danog matematičkog zadatka potiče od Luce Paciolija jer se u njemu koristi Heronova formula koju je on poznavao.

Prvo rješenje je nešto složenije (dao ga je autor članka, op.a.) jer se u njemu koristi trigonometrija koja u doba Luce Paciolija još nije bila formalizirana. Dobro bi bilo da čitatelji ovog članka pokušaju naći još jedno rješenje danog zadatka.

LITERATURA

1/ Ž. Dadić, *Razvoj matematike, Moderna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

2/ I. Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb, 1995.

3/ M. S. Jovanović, D. Đ. Tošić, *Zbirka rešenih zadataka i problema iz matematike za učenike srednjih škola*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[1] Heron (najvjerojatnije 1. stoljeće poslije Krista), starogrčki matematičar, živio i radio u Aleksandriji. Napisao je više dijela. Za matematiku je najvažnija njegova knjiga "Metrika", u kojoj postoje mnoge točne i približne formule za računanje površine i obujma. Formula (3) je dobila ime po njemu iako je istu poznavao Arhimed koji je živio oko tri stoljeća ranije.