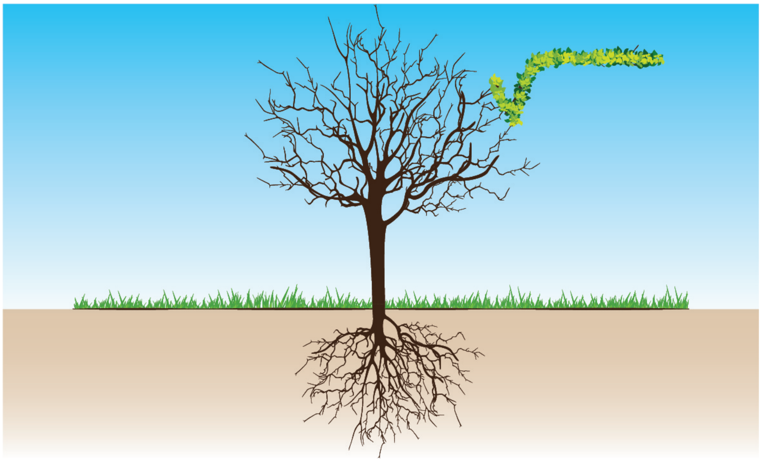
Približno računanje korijena

Josip Kličinović, Zagreb



U osmom se razredu osnovne škole iz matematike obrađuje gradivo (drugog) korijena. Naravno, korijeni kvadrata se nauče napamet, a oni ostali se računaju uz pomoć kalkulatora. Slično se radi i u prvom razredu srednje škole, uz to što se tad obrađuju i korijeni višeg reda te zapis korijena kao potencije s racionalnim eksponentom.

Zgodno je prikazati neke metode približnog računanja (ne "vađenja"!) korijena na dodatnoj nastavi. Neke jednostavnije metode primjerene su čak i za redovitu nastavu. U ovom će članku biti prikazane tri jednostavne metode koje učenici mogu shvatiti već i u 8. razredu osnovne škole.

Metoda profinjenja (ili metoda sendviča)

Kod ove se metode radi o tome da profinjujemo rezultat do točnosti koju sami želimo na način da ga "stišćemo" između dvaju brojeva sve dok nismo zadovoljni točnošću. Cijeli dio rezultata određujemo promatrajući prvi manji broj koji se može "lijepo" korjenovati. Potom profinjujemo znamenku po znamenku, počevši od znamenke desetinke.

Primjer 1. Izračunaj $\sqrt{10}$.

Znamo da vrijedi $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ pa onda vrijedi i $3 < \sqrt{10} < 4$. Dakle, prva je znamenka 3.

Izračunamo sada kvadrate svih brojeva oblika $3.a$ gdje je $0 < a < 9$ i to zapišemo u tablicu.

x	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
x^2	9	**9.61**	**10.24**	10.89	11.56	12.25

x	3.6	3.7	3.8	3.9	4	
x^2	12.96	13.69	14.44	15.21	16	

Iz tablice vidimo da vrijedi

$$3.1 < \sqrt{10} < 3.2.$$

Sada tražimo stotinke također koristeći se tablicom (zbog jednostavnosti ćemo kvadrate ubuduće zaokruživati na tri decimalna mjesta):

Josip Kličinović, X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb

x	3.1	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15
x^2	9.61	9.672	9.734	9.798	9.86	9.922

x	3.16	3.17	3.18	3.19	3.2	
x^2	**9.986**	**10.049**	10.112	10.176	10.24	

Iz tablice vidimo da vrijedi

$$3.16 < \sqrt{10} < 3.17.$$

Analogno tražimo znamenku tisućinke:

x	3.16	3.161	3.162	3.163	3.164	3.165
x^2	9.986	9.991	**9.998**	**10.005**	10.011	10.0173

x	3.166	3.167	3.168	3.169	3.17	
x^2	10.024	10.03	10.036	10.043	10.049	

Iz tablice zaključujemo da vrijedi

$$3.162 < \sqrt{10} < 3.163.$$

Nastavimo li postupak, u sljedećem bismo koraku dobili $3.1622 < \sqrt{10} < 3.1623$. Na ovaj smo način izračunali $\sqrt{10}$ s točnošću od četiri decimalna mjesta. Izračun kalkulatorom daje $\sqrt{10} \approx 3.16227766$.

Naravno, tablice nismo morali popunjavati do kraja. Mogli smo stati kad bismo vidjeli da je kvadrat prešao broj 10. Također smo mogli metodom polovljenja intervala odrediti traženu znamenku. Na primjer, za znamenku desetinku možemo vidjeti da je $3.5^2 = 12.25$ što je preko 10 (što znači da je $3 < \sqrt{10} < 3.5$), a potom izračunati $3.3^2 = 10.89$, i tako dalje dok ne odredimo znamenku desetinku.

Metoda kvadriranja binoma

Ova je metoda jako jednostavna, ali će dati nešto grublju aproksimaciju od prethodne metode. Najbolje ju je predstaviti kroz dva primjera.

Primjer 2. Izračunaj $\sqrt{28}$.

Vrijedi $\sqrt{25} < \sqrt{28} < \sqrt{36}$ pa zaključujemo da je $5 < \sqrt{28} < 6$. Kako je broj 28 bliže broju 25 nego broju 36, pisat ćemo $\sqrt{28} = 5 + x$, gdje je $0 < x < 1$.

Kvadrirajmo danu jednakost:

$$\begin{aligned} 28 &= (5+x)^2 \\ 28 &= 25 + 10x + x^2. \end{aligned}$$

Kako je $0 < x < 1$, slijedi da će biti $0 < x^2 < x$. Stoga ćemo zanemariti x^2 te dobijemo linearnu jednadžbu

$$\begin{aligned} 28 &= 25 + 10x \\ 10x &= 3 \\ x &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\sqrt{28} \approx 5 + \frac{3}{10} \approx \frac{53}{10} \approx 5.3$. Računajući na kalkulatoru, vidimo da je

$$\sqrt{28} \approx 5.291502622.$$

U praktične svrhe, sasvim zadovoljavajuća aproksimacija!

Primjer 3. Izračunaj $\sqrt{46}$.

Vrijedi $\sqrt{36} < \sqrt{46} < \sqrt{49}$ pa zaključujemo $6 < \sqrt{46} < 7$. Kako je broj 46 bliže broju 49 nego broju 36, pisat ćemo $\sqrt{46} = 7 - x$, gdje je $0 < x < 1$.

Analognim postupkom kao u prethodnom primjeru, dobit ćemo $x = \frac{3}{14}$, odnosno $\sqrt{46} \approx \frac{95}{14} \approx 6.78571$. Računajući kalkulatorom, dobijemo $\sqrt{46} \approx 6.78233$ pa vidimo da je ovo jedna aproksimacija s točnošću 10^{-2}.

Zašto smo u oba primjera birali zapis rješenja u ovisnosti o blizini prvog manjeg, odnosno većeg korijena? Da smo uzeli obrnuto (u 2. primjeru

$\sqrt{28} = 6 - x$, u 3. primjeru $\sqrt{46} = 6 + x$), aproksimacija bi nam bila lošija jer je x^2 u tim računima bio veći od x^2 u računima u primjerima.

Zanimljivo je da su ovu metodu poznavali Babilonci prije čak 3500 godina, a Indijci su je imali zapisanu u jednoj od svetih knjiga (*Sulba Sutra* ili *Śulbasūtra* su sutre s uputstvima za Śrauta ritual i konstrukciju plamenog oltara). I jedni i drugi* su se koristili formulom $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$.

Ipak, pri radu s učenicima bolje je pokazati metodu kvadriranja binoma, a ne babilonsku ili indijsku gotovu formulu, jer se upravo ta metoda može iskoristiti za upoznavanje s pojmom približno računanje, kao i objašenjenje u kojem je dijelu i zašto egzaktan račun postao približan račun.

Heronova metoda (ili metoda površine kvadrata)

Ova se metoda temelji na geometrijskoj interpretaciji kvadrata broja. Odnosno, temelji se na određivanju duljine stranice a kvadrata kojemu znamo površinu P. Pritom ustvari formiramo niz pravokutnika od kojih svi aproksimiraju danu površinu.

Prvo što moramo utvrditi jest između kojih se cijelih brojeva nalazi traženi rezultat, odnosno, koji je cijeli dio traženog rezultata. Nazovimo taj broj x_0. Tad je duljina druge stranice pravokutnika kojemu je površina P jednaka $y_0 = \frac{P}{x_0}$. Modificirajmo sada malo taj pravokutnik tako da mu malo smanjimo jednu stranicu, a malo povećamo drugu stranicu. To je najlakše napraviti tako da za jednu stranicu računamo aritmetičku sredinu $x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}$, a drugu stranicu računamo $y_1 = \frac{P}{x_1}$. Taj postupak primjenjujemo dok ne dođemo do zadovoljavajućeg rezultata. Za rezultat ćemo uzeti y_n.

Ovaj je algoritam zgodno za prikazati u tabličnom obliku. Pokažimo to na primjeru.

Primjer 4. Izračunaj $\sqrt{71}$.

Tražimo, dakle, duljinu stranice kvadrata čija je površina jednaka 71. Prikažimo tablično prethodno opisani algoritam.

Odredimo početnu aproksimaciju. Kako je $8 < \sqrt{71} < 9$, uzimamo da je $x_0 = 8$ te računamo $y_0 = \frac{71}{8} \approx 8.875$.

n	x_n	y_n
0	8	$\frac{P}{x_0} = \frac{71}{8} = 8.875$
1	$\frac{x_0 + y_0}{2} = 8.4375$	$\frac{P}{x_1} = \frac{71}{8.4375} \approx 8.41481$
2	$\frac{x_1 + y_1}{2} \approx 8.426155$	$\frac{P}{x_2} = \frac{71}{8.426155} \approx 8.426145$

Kako je mala razlika između x_2 i y_2, možemo zaključiti da se traženi rezultat nalazi između tih dvaju broja te pišemo $\sqrt{71} \approx 8.426145$. Korištenjem kalkulatora saznajemo $\sqrt{71} \approx 8.42614977$ pa zaključujemo da smo dobili dovoljno dobru aproksimaciju.

Primijetimo da smo ovom metodom jako brzo došli do toga da nam se x_n i pripadni y_n malo razlikuju.

Zgodno je ovaj zadatak napraviti i na nastavi informatike pri obradi programa tabličnih proračuna (npr, MS Excel, OO Calc, GeoGebra) kad se obrađuje korištenje formula i relativno kopiranje formula uz fiksiranje jednog polja u formuli. Osim toga, ova se metoda može koristiti i u nastavi programiranja u bilo kojem programskom jeziku kad se obrađuju petlje, s tim da tad moramo zadati i koju točnost ćemo smatrati prihvatljivom (na primjer, 10^{-3}ili 10^{-5}).

* S obzirom na to da je prva od nekoliko *Śulbasūtra* pisana nekoliko stotina godina nakon što su Babilonci koristili tu formulu, logično je pretpostaviti da su Indijci preuzeli formulu od Babilonaca.

Korijeni višeg reda

Svaka od opisanih metoda može se koristiti i za računanje vrijednosti korijena višeg reda. Pri tome treba uzeti u obzir određene promjene.

Na primjer, metoda kvadriranja binoma postat će metoda kubiranja binoma. Primjenjujući tu metodu zanemarit će se čak dva člana (koji sadrže x^2 i x^3), čime će i dobivena aproksimacija biti lošija. Ta se metoda može pokazati učenicima u 1. razredu SŠ nakon obrade kuba binoma. Korijene četvrtog i višeg reda bi se moglo tek u 4. razredu SŠ nakon što obrade binomni poučak. Ali i dalje se mora voditi računa da je za korijene višeg reda ova metoda jako nepouzdana.

Heronovu metodu također se može poopćiti i koristiti za računanje kubnog korijena. Na primjer, za računanje trećeg korijena zamislimo da imamo kocku zadanog volumena te tražimo duljinu brida. Pritom formiramo niz kvadara na sličan način kao u opisanoj metodi, s tim da će se u svakoj aproksimaciji $n > 0$ uzeti da je $x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}}{3}$, $y_n = x_n$, $z_n = \frac{V}{x_n y_n}$, a početnu vrijednost za x_0 određujemo na analogan način kao i u Heronovoj metodi za računanje drugog korijena.

Neke druge metode

Učenici koji će jednog dana studirati matematiku ili neki tehnički fakultet, imat će kolegij Numerička matematika. Na tom se kolegiju obrađuju još neke metode uz pomoć kojih se može odrediti približna vrijednost korijena. Na primjer, metoda *regula falsi*, Newtonova metoda (metoda tangenti) – o kojoj se više može pročitati u [2], metoda sekante, itd. Zapravo, neke od tih metoda mogu se obraditi na dodatnoj nastavi matematike u 4. razredu nakon obrađivanja derivacija. Pritom se zadatak određivanja približne vrijednosti korijena svodi na zadatak: Odredi pozitivnu nul-točku funkcije $f(x) = x^2 - a$. Sve se te metode iz numeričke matematike koriste u računalstvu te upravo tim metodama računalo određuje približnu vrijednost korijena.

Zadatak približnog određivanje vrijednosti korijena može biti lijep primjer da zainteresiramo učenike za proučavanje matematike i programiranja u svrhu nastave matematike.

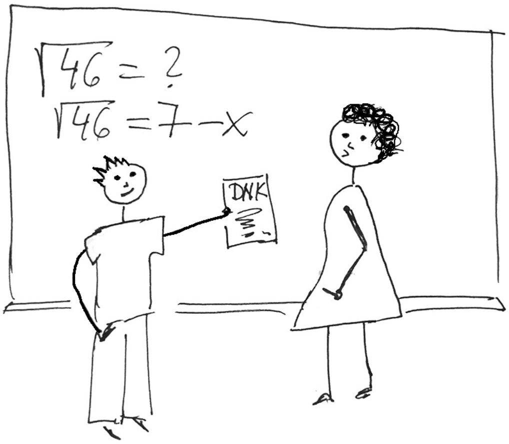
LITERATURA

1/ M. Pavleković (2001.): *Metodika nastave matematike s informatikom I*, Element, Zagreb.

2/ S.. Varošanec (2004.): *Neke metode približnog korjenovanja*, Zbornik radova 2. kongresa nastavnika matematike, Zagreb.

3/ V. J. Katz (1993.): *A history of mathematics*, HarperCollins College Publishers, New York.

4/ G. I. Gleizer (2003.): *Povijest matematike za školu*, Školske novine & HMD, Zagreb.



Evo profesorice, imam i liječničku potvrdu da mi nedostaje matematički gen...