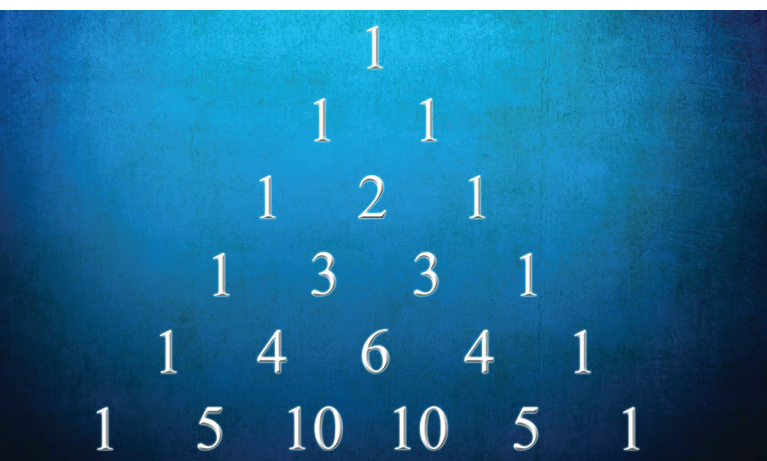


Kombinatorika i binomni teorem



Ana Ujčić Palin, Pula

Binomni teorem obrađujemo u četvrtom razredu gimnazije u sklopu cjeline Brojevi, zanemarujući vezu s kombinatorikom. Udžbenici nam predlažu da binomni teorem obradimo tako da uvedemo binomni koeficijent, proučimo svojstva, zapišemo binomne koeficijente u trokut pozivajući se na Pascala pa uočimo zgodno svojstvo koje i dokažemo. Kasnije naslutimo da su

upravo ti brojevi koeficijenti u potenciji binoma. Dio se učenika ovdje zapita kako smo znali da binomne koeficijente treba baš tako definirati, a ponuđeni dokaz matematičkom indukcijom izbjegava odgovor na pitanje koje se prirodno postavlja.

Izvod binomnog teorema i dokazi svojstava binomnih koeficijenata mnogo su prirodniji ako se uvedu samo osnovni pojmovi iz kombinatorike. Dovoljno je izdvojiti vrlo malo vremena i objasniti pojmove permutacije i kombinacije.

Priprema terena – permutacije i kombinacije

Prije definiranja faktoriijela učenicima se može postaviti nekoliko motivacijskih zadataka.

- Koliko ima uređenih trojki brojeva $\{1, 2, 3\}$?
- Na koliko načina mogu Ivo, Petar, Filip i Jan sjesti jedan pored drugoga na klupicu ispred škole?

Dobro je da učenici pokušaju ispisati sve trojke ili sve rasporede sjedenja jer ih to navodi na općenito načelo prebrojavanja:

- bilo koji od zadanih triju brojeva može biti na prvom mjestu, preostaju dvije mogućnosti za drugo mjesto, a na treće ide preostali broj pa ukupno ima $3 \cdot 2 \cdot 1$ uređenih trojki,
- tko će sjesti prvi, bira se na četiri načina, tko drugi na tri načina, tko treći na dva načina, a na četvrto mjesto ide onaj tko je ostao pa ukupno ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mogućih rasporeda.

Nakon ovakvih primjera mogu se definirati permutacije.

Definicija. Uređenu n -torku svih elemenata nekog skupa nazivamo permutacijom.

Ana Ujčić Palin, prof. matematike, Gimnazija Pula, anaujcic@gmail.com

Pozivajući se na uvodne primjere dolazi se do zaključka da je broj permutacija n -članog skupa $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Sada je dovoljno reći da se taj broj označava $n!$ i naziva faktorijel.

Za prijelaz s permutacija na kombinacije najboljim se čini primjer na kojem se uočava kada je važan poredak, a kada ne.

- Na koliko se načina u razredu sa 24 učenika može odabrati predsjednika, zamjenika i blagajnika?
- Na koliko se načina u razredu sa 24 učenika može odabrati troje učenika koji će sudjelovati u kombinatornoj radionici?

Prvog učenika možemo odabrati na 24 načina, drugog na 23 načina, a trećeg na 22 načina, ukupno na $24 \cdot 23 \cdot 22$ načina. Tako dobivamo uređene trojke (Ivo, Iva, Ivana), (Ivana, Ivo, Iva), ...

U prvom slučaju redoslijed izbora je važan jer prva pozicija predstavlja predsjednika, druga zamjenika, a treća blagajnika.

U drugom zadatku nam redoslijed odabira nije važan pa ne tražimo uređene trojke već tročlane podskupove. Uočavamo da smo na spomenuti način svaku trojku brojili više puta. Kako se svaka trojka pojavljuje $3!$ puta, ukupan broj izbora je $\frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3!}$.

Sada se definira kombinacija.

Definicija. K -člani podskup nekog skupa nazivamo k -kombinacijom.

Poopćavanjem zaključaka iz prethodnog primjera, vidi se da je broj načina da se iz skupa od n elemenata odabere k elemenata, neovisno o poretku, jednak broju

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}.$$

Broj $\binom{n}{k}$ zovemo binomni koeficijent.

Kako bismo prihvatili ovaj pojam, učenici mogu odgovoriti na niz kratkih pitanja:

- Na koliko načina može nastavnik matematike od 10 zadataka odabrati 6 zadataka koje će zadati za zadaću? Može li svaki učenik u razredu dobiti različiti izbor zadataka? A svaki učenik u generaciji?

$$\text{Odgovor: } \binom{10}{6} = 210.$$

- U jednom veslačkom klubu između 7 veslača treba odabrati najbolju četvorku koja će se natjecati u četvercu bez kormilara. Odlučeno je da će svaka četvorka odveslati istu stazu kako bi pokazali koja je najuspješnija. Koliko je mogućih četvorki? Ima li smisla ovako testirati?

$$\text{Odgovor: } \binom{7}{4} = 35.$$

- Koliko je mogućih kombinacija u igri Loto 7/39?

$$\text{Odgovor: } \binom{39}{7} = 15\,380\,937.$$

Osnovna svojstva binomnih koeficijenata

Za svojstva binomnih koeficijenata moguće je dati kombinatorne argumente koji im daju dodatni smisao, učenicima su intuitivni i lakše ih pamte.

$\binom{n}{1} = n$ jer postoji n različitih 1-članih podskupova skupa od n elemenata.

$\binom{n}{0} = 1$ jer postoji samo jedan podskup s nula elemenata, prazan skup.

$\binom{n}{n} = 1$ jer postoji samo jedan podskup koji sadrži sve elemente danog skupa.

Svojstvo simetrije

- Na koliko je načina moguće odabrati kojih će 15 od 20 učenika jednog razreda otići na nagradni izlet?

Očito ima $\binom{20}{15}$ mogućnosti. Učenici će sami uočiti da je ovaj problem ekvivalentan problemu

odabira 5 učenika koji neće otići na nagradni izlet jer svaki izbor 5 učenika koji ne idu odgovara jednom izboru 15 učenika koji idu pa je

$$\binom{20}{15} = \binom{20}{5}.$$

Ovo vodi do svojstva simetrije

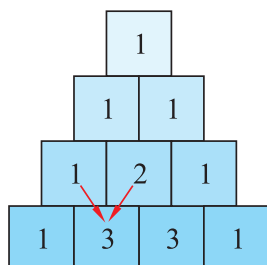
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

i spoznaje da je u skupu od n različitih elemenata jednak broj k -članih i $(n-k)$ -članih podskupova.

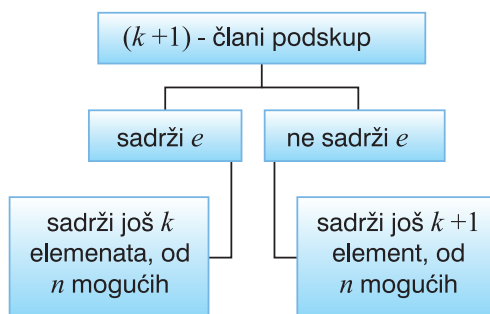
Pascalov trokut

U Pascalovu trokutu uočava se svojstvo

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$



Lijeva strana jednakosti predstavlja broj $(k+1)$ -članih podskupova skupa od $n+1$ elemenata. Odaberimo proizvoljan element e pa sve $(k+1)$ -člane podskupove podijelimo u dva disjunktna skupa: one koji sadrže e i one koji ne sadrže e .



Pokazat ćemo da je prvih $\binom{n}{k}$, a drugih $\binom{n}{k+1}$:

- Ako $(k+1)$ -člani podskup sadrži e , onda sadrži još k elemenata od preostalih n elemenata pa takvih podskupova ima $\binom{n}{k}$.
- Ako $(k+1)$ -člani podskup ne sadrži e , onda sadrži još $k+1$ elemenata od preostalih n elemenata pa takvih podskupova ima $\binom{n}{k+1}$.

Ovime je kombinatorno dokazano svojstvo koje se obično u nastavi dokazuje računski.

Binomni teorem

Nakon ponavljanja formule za kvadrat i kub binoma razmatra se izvod formule za četvrtu potenciju.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = ?$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b).$$

Množenjem ovih zagrada dobiju se pribrojnici od kojih svaki sadrži po jedan faktor iz svake zgrade.

$$(a+b)^4 = aaaa + aaab + aaba + aabb + abaa + \dots + bbbb$$

$$(a+b)^4 = \square a^4 + \square a^3b + \square a^2b^2 + \square ab^3 + \square b^4.$$

Promatra se broj pojavljivanja faktora b u pojedinom pribrojniku. Jedan od mogućih pribrojnika je a^3b koji se dobije ako se iz jedne zgrade uzme b , a iz preostalih triju a . Između četiri zgrade treba odabrati jednu iz koje se uzima b , a to je moguće na $\binom{4}{1}$ načina. Pribrojnik a^2b^2 dobije se ako se iz dviju zagrada odabere b , a iz preostalih dviju a pa

se a^2b^2 pojavljuje $\binom{4}{2}$ puta. Slijedi zaključak

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Ovo se razmatranje lako poopći za n -tu potenciju

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

jer se, na primjer, pribrojnik $a^{n-2}b^2$ pojavljuje ako se iz dvije od n zagrada uzme b , a iz ostalih a što se može učiniti na $\binom{n}{2}$ načina.

Još jedan zadatak

Uz temu binomnog teorema rješavaju se zadatci poput ovoga:

- Izračunaj

$$\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \dots + \binom{100}{100}.$$

Sličan je zadatak nedavno uvršten i u ispit državne mature, a rješava se tako da prepoznamo potenciju binoma:

$$\begin{aligned} \binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \dots + \binom{100}{100} \\ = (1+1)^{100} = 2^{100}. \end{aligned}$$

Ovaj zadatak ima i zanimljivu kombinatornu interpretaciju.

Polazi se od broja elemenata partitivnog skupa

- Koliko ima različitih podskupova skupa od 100 elemenata?

Ovaj je problem moguće riješiti na dva načina.

1. Može se promatrati jedan po jedan element i za svaki birati hoće li biti uvršten u podskup ili ne. Sa svakim sljedećim elementom broj mogućnosti se udvostručuje pa je broj mogućih podskupova jednak 2^{100} .
2. Podskupove se može grupirati po broju elemenata od 0 do 100:

- 0 elemenata (prazan skup) $\binom{100}{0}$
- 1 element $\binom{100}{1}$
- 2 elementa $\binom{100}{2}$
- ...
- 100 elemenata $\binom{100}{100}$.

Rješenje početnog zadatka predstavlja dva načina brojenja elemenata partitivnog skupa.

U razredu

Ako se kao matematičari sjećamo kombinatorike kao skliskog terena u kojem nikad nismo sigurni jesmo li dobro brojili, je li poredak važan ili pojavljuje li se isti element više puta, mogli bismo se zabrinuti da će učenicima to predstavljati još veći problem. Ipak, pokazalo se da se nakon ovih uvodnih primjera učenicima pojam permutacije i kombinacije čine jednostavnima i prirodnima, a kako se nisu susreli sa složenijim primjerima i logičkim zavrzlamama, nisu tako nepovjerljivi prema rezultatima.

Pridruživanje dodatnog smisla jednakostima u učenicima budi osjećaj logičke satisfakcije i oduševljenje matematičkim skladom što bi i trebala biti jedna od zadaća srednjoškolske matematike.