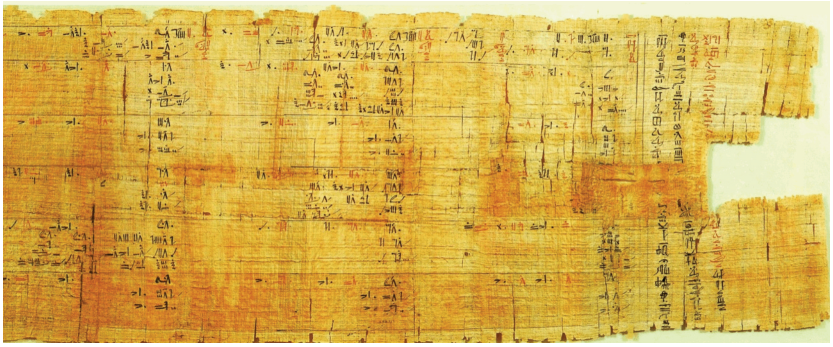
# Staroegipatski razlomci,

## 2. dio



*Neven Elezović, Zagreb*

*Prikaz pravog razlomka* $\frac{p}{q}$ *u egipatskom obliku jest prikaz oblika*

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k},$$

*pri čemu za prirodne brojeve u nazivnicima ovih razlomaka vrijedi* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

Na primjer:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

U prvom dijelu ovog članka raspravili smo probleme s egipatskim razlomcima koji se mogu uspješno rješavati u osnovnoj školi i u prvom razredu srednje škole. U nastavku ćemo raspraviti neka složenija pitanja o egipatskim razlomcima koja ostavljaju mjesto za samostalan rad, daljnja eksperimentiranja i istraživanja.

## Fibonaccijev pohlepni algoritam

*Može li se svaki pravi razlomak prikazati kao zbroj jediničnih? Kako se razlomak pretvara u egipatski?*

Odgovor na prvo pitanje je: Da! I može se dokazati na različite načine. Kad biramo vrstu dokaza, onda je korisno pronaći onaj koji nije samo *egzistencijalni* jer se u njemu dokazuje da takav prikaz postoji, ali bez konkretnog naputka kako se takav prikaz određuje. *Konstruktivni* dokaz daje *algoritam* za određivanje traženog prikaza.

Prvi dokaz ove tvrdnje i algoritam za pretvaranje razlomka u egipatski dao je jedan od utemeljitelja europske matematike u ranom srednjem vijeku Leonardo Fibonacci, u svojoj knjizi *Liber abaci* iz 1202. godine, slobodno prevedeno kao *Knjiga o računanju*.

Njegova je uputa sljedeća: Postupak pretvaranja sastoji se od nekoliko koraka. U prvom koraku

prof. dr. sc. Neven Elezović, Zavod za primijenjenu matematiku, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, neven.elezovic@fer.hr

od razlomka se oduzima *najveći* jedinični razlomak manji od njega. Na ostatak oduzimanja primijeni se isti ovaj algoritam.

Pratimo taj algoritam na primjeru.

**Primjer 1.** *Pretvorimo $\frac{7}{9}$ u egipatski razlomak.*

Najveći jedinični razlomak manji od $\frac{7}{9}$ jest $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Taj se razlomak dobiva tako da se nazivnik zamijeni s prvim većim višekratnikom brojnika. Sad računamo

$$\frac{7}{9} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 7 - 9}{2 \cdot 9} = \frac{5}{18}.$$

Na ostatak primjenjujemo isti postupak. Najveći jedinični razlomak manji od $\frac{5}{18}$ je $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Dalje je:

$$\frac{5}{18} - \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 4 - 18}{4 \cdot 18} = \frac{1}{36}.$$

Ovaj ostatak je jedinični razlomak, pa je postupak završen. Dobili smo

$$\frac{7}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}.$$

**Zadatak 1.** Pretvori $\frac{7}{59}$ u egipatski razlomak.

Odgovor glasi

$$\frac{7}{59} = \frac{1}{9} + \frac{1}{133} + \frac{1}{70\,623}.$$

Postupak u kojem se od razlomka uvijek pohlepno grabi *najveći* jedinični razlomak naziva se **pohlepni algoritam**. Prikaz razlomka dobiven ovim postupkom zvat ćemo pohlepnim.

## Dokaz egzistencije

Dokazat ćemo da se pohlepnim algoritmom uvijek dolazi do cilja.

Pretpostavimo da početni razlomak $\frac{p}{q}$ nije jedinični, inače nemamo što činiti. Drugim riječima, neka je $p > 1$. Od razlomka $\frac{p}{q}$ oduzimamo *najveći* razlomak oblika $\frac{1}{n}$, a koji je manji od $\frac{p}{q}$. To znači da je $n$ najmanji prirodni broj za koji vrijedi

$$\frac{1}{n-1} > \frac{p}{q} > \frac{1}{n}.$$

Budući da razlomak $\frac{p}{q}$ nije i jediničan, ovdje vrijede stroge nejednakosti. Sada je

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{np - q}{qn},$$

i razlomak zdesna je ostatak nakon prvog koraka algoritma.

*Pokažimo da je njegov brojnik manji od $p$.* Uistinu, vrijedi

$$\frac{1}{n-1} > \frac{p}{q} \iff q > (n-1)p \iff np - q < p.$$

Time smo pokazali da vrijedi prikaz

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n} + \frac{np - q}{qn} = \frac{1}{n} + \frac{p'}{q'}$$

i da je brojnik $p'$ posljednjeg pribrojnika manji od $p$.

Dakle, u svakom se koraku algoritma brojnik razlomka u ostatku smanjuje. To znači da će postupak prestati u konačnom broju koraka.

Promotrimo primjer koji ilustrira ovaj postupak.

**Primjer 2.** *Odredimo egipatski prikaz za razlomak $\frac{5}{11}$.*

Primijetimo da vrijedi

$$\frac{5}{11} > \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Ovdje je $\frac{1}{3}$ *najveći* jedinični razlomak manji od $\frac{5}{11}$, jer je

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{11} < \frac{1}{2}.$$

Sada vrijedi

$$\frac{5}{11} - \frac{1}{3} = \frac{4}{33}.$$

Za razlomak $\frac{4}{33}$ najveći jedinični razlomak manji od njega je $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, pa imamo

$$\frac{4}{33} = \frac{1}{9} + \frac{4 \cdot 9 - 33}{33 \cdot 9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{99}.$$

Tako dobivamo egipatski prikaz početnog razlomka:

$$\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}.$$

Primijetimo da smo mogli postupiti i ovako:

$$\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{4}{33} = \frac{1}{3} + \frac{3+1}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{33}.$$

Ovaj je rezultat ljepši od onog dobivenog pohlepnim algoritmom, tako da pitanje određivanja najprikladnijeg prikaza ostaje otvoreno.

Uvjerite se da vrijedi i ovaj prikaz:

$$\frac{5}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{220}.$$

Time se postavlja i pitanje:

*Koliko postoji prikaza zadanog razlomka koji imaju jednak broj pribrojnika?*

Odgovor na neka od tih pitanja je potpuno netrivijalan i predmet je recentnih znanstvenih istraživanja.

### Zapisivanje Fibonaccijeva algoritma

**Primjer 3.** *Odredi egipatski prikaz razlomka* $\frac{57}{243}$ *rabeći pohlepni algoritam.*

Računanje ćemo zapisivati u sljedećoj tablici.

| **5** | **29** | **11 745** |
|---|---|---|
| 57 | 42 | 3 |
| 243 | 1215 | 35 235 |
| 285 | 1218 | 35 235 |

Računanje ide ovim redom: U prvi stupac upišu se brojnik i nazivnik razlomka. Zatim se izračuna

$$\left\lceil \frac{243}{57} \right\rceil = \mathbf{5}$$

i rezultat upiše u prvi redak prvog stupca. Ovdje je $\lceil x \rceil$ *najmanji cijeli broj veći od ili jednak* $x$.

Zatim se rezultat množenja $\mathbf{5} \cdot 57 = 285$ upiše na dno prvog stupca.

Računanje prelazi u drugi stupac. Tu je

$$285 - 243 = 42$$

i

$$\mathbf{5} \cdot 243 = 1215.$$

Sad smo u istoj poziciji kao u početku i nastavljamo na identičan način. Imamo

$$\left\lceil \frac{1215}{42} \right\rceil = \mathbf{29},$$

$$\mathbf{29} \cdot 42 = 1218.$$

Na koncu popunjavamo treći stupac:

$$1218 - 1215 = 3,$$
$$\mathbf{29} \cdot 1215 = 35\,235,$$
$$\left\lceil \frac{35\,235}{3} \right\rceil = \mathbf{11\,745},$$
$$\mathbf{11\,745} \cdot 3 = 35\,235.$$

Posljednja dva elementa trećeg stupca su jednaka i postupak je završen. Inače bismo prešli u sljedeći stupac.

Dobili smo prikaz

$$\frac{57}{243} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{11\,745}.$$

**Zadatak 2.** Opravdaj ovaj način računanja.

**Zadatak 3.** Opravdaj formulu

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\lceil q/p \rceil} + \frac{(-q) \mod p}{q \lceil q/p \rceil}$$

i dovedi je u vezu s računanjem u prethodnom primjeru.

### Nedostatci Fibonaccijeva algoritma

Fibonaccijev pohlepni algoritam uvijek vodi cilju, ali rezultat često nije zadovoljavajući. Usporedimo sljedeći egipatski prikaz

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{33}+\frac{1}{121}+\frac{1}{363}$$

s ovim koji ćemo dobiti primjenjujući pohlepni algoritam:

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{25}+\frac{1}{757}+\frac{1}{763\,309}+\frac{1}{873\,960\,180\,912}+\frac{1}{1\,527\,612\,795\,642\,093\,418\,846\,225}.$$

Ovaj primjer nije usamljen, već predstavlja pravilo.

**Teorem.** *Ako je*

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_k},$$

*prikaz dobiven u pohlepnom algoritmu, onda vrijedi*

$$n_{i+1}\geq n_i^2-n_i+1.$$

Prema definiciji algoritma vrijedi za svaki $i$

$$\frac{1}{n_i-1}>\frac{p}{q}-\frac{1}{n_1}-\ldots-\frac{1}{n_{i-1}}\geq\frac{1}{n_i}$$

jer je $\frac{1}{n_i}$ najveći jedinični razlomak koji se može u tom trenutku oduzeti od ostatka iz prethodnih koraka algoritma. Također, vrijedi

$$\frac{p}{q}\geq\frac{1}{n_1}+\ldots+\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i+1}}.$$

Odavde slijedi

$$\frac{1}{n_i-1}>\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i+1}}$$

a ta je nejednakost ekvivalentna s

$$n_{i+1}>n_i^2+n_i,$$

što je i trebalo dokazati.

To znači da će se u dugačkim prikazima proizašlim iz pohlepnog algoritma nazivnici vrlo brzo povećavati, sljedeći nazivnik ima otprilike dvostruko više znamenaka nego prethodni.

Primjerice, razlomak $\frac{31}{311}$ ima u svom rastavu deset članova. Početak izgleda ovako:

$$\frac{31}{311}=\frac{1}{11}+\frac{1}{115}+\frac{1}{13\,567}+\frac{1}{190\,623\,619}+\frac{1}{37\,683\,192\,230\,798\,623}+\ldots,$$

a posljednja četiri nazivnika imaju previše znamenaka da bismo ih mogli ovdje ispisati: 34, 67, 134, 269 i 537 znamenaka! Ako nismo pohlepni i rastav potražimo na neki drugi način, možda otkrijemo da vrijedi

$$\frac{31}{311}=\frac{1}{12}+\frac{1}{63}+\frac{1}{2799}+\frac{1}{8708}.$$

Fibonacci je bio znanstvenik daleko ispred svog vremena. Gotovo je nevjerojatno da krajem 12. stoljeća, na izlazu iz mračnog doba srednjega vijeka postoji čovjek koji se bavi problemima koji će postati zanimljivi tek za nekoliko stoljeća. Treba imati u vidu kako on u svojoj knjizi poučava o temeljima računanja u dekadskom sustavu koji u to doba još uvijek nije bio dovoljno poznat u Europi. Međutim, između uputa o tome kako zbrojiti ili pomnožiti dva broja Fibonacci je ubacio i rješavao potpuno apstraktne probleme, poput čuvenog problema o razmnožavanju zečeva, rješavao diofantske jednadžbe i razmatrao probleme iz teorije brojeva.

Fibonacci je na nizu primjera pokazao kako se nalaze "lijepi" prikazi egipatskih razlomaka, ali je bio svjestan da se tu radi samo o konkretnim primjerima. Njegov je algoritam služio samo kao krajnja mjera ako se ne uspije na neki drugi način doći do ljepšeg prikaza.

## Nalaženje optimalnih prikaza

Navest ćemo neka pitanja koja se postavljaju o prikazu:

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_k}.$$

1. Je li moguće pronaći prikaz za koji je broj pribrojnika zdesna minimalan?
2. Je li moguće pronaći prikaz za koji je najveći nazivnik $n_k$ najmanji mogući?

Općeniti odgovor na ova dva pitanja nije poznat. Ne znamo algoritam koji bi vodio do odgovora u općem slučaju.

Primjerice, Fibonaccijev algoritam osigurava da je $k \leq p$, odnosno broj pribrojnika nije nikad veći od brojnika početnog razlomka.

Postoje primjeri razlomaka u kojima pohlepni algoritam ima točno $p$ koraka. Razlomci s najmanjim nazivnikom su:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{17}, \frac{5}{31}, \frac{6}{109}, \frac{7}{253}, \frac{8}{97}, \frac{9}{271}, \frac{10}{1621}, \frac{11}{199}.$$

Tako, primjerice, razlomak $\frac{5}{31}$ u pohlepnom prikazu ima točno pet pribrojnika:

$$\frac{5}{31} = \frac{1}{7} + \frac{1}{55} + \frac{1}{3979} + \frac{1}{23\,744\,683} + \frac{1}{1\,127\,619\,917\,796\,295},$$

a posljednji na ovoj listi imat će točno 11 pribrojnika.

**Zadatak 4.** Početak pohlepnog prikaza posljednjeg razlomka izgleda ovako:

$$\frac{11}{199} = \frac{1}{19} + \frac{1}{379} + \frac{1}{159\,223} + \dots$$

Procijeni broj znamenaka nazivnika posljednjeg pribrojnika.

Mala pomoć je vjerojatno potrebna. Za pohlepni prikaz vrijedi

$$n_{i+1} \geq n_i^2 - n_i + 1 \approx n_i^2.$$

Zato je

$$n_{i+2} \approx n_i^4$$

i općenito

$$n_{i+k} \approx n_i^{2^k}.$$

Dakle

$$\begin{aligned}\log(n_{11}) &\approx 2^8 \log(n_3) = 256 \log(159\,223)\\ &= 1331.7.\end{aligned}$$

Po ovoj procjeni, broj $n_{11}$ ima oko 1332 znamenke.

Njegova točna vrijednost je

$$n_{11} = \underbrace{2\,039\,986\,670 \dots 410\,165\,441}_{\text{1348 znamenaka}}.$$

**Zadatak 5.** Napiši kôd koji će odrediti pohlepne prikaze ovih razlomaka. (Program koji ćete koristiti mora imati mogućnost računanja s neograničenim brojem znamenaka.)

U sljedećoj tablici napisan je najkraći mogući prikaz za prvih nekoliko razlomaka s malim brojnicima i nazivnicima.

Radi jednostavnosti koristit ćemo sljedeći jednostavniji zapis ovih razlomaka. Umjesto prikaza

$$\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99},$$

dovoljno je navesti samo nazivnike (jer su brojnici jednaki 1). Upravo na taj način su i Egipćani zapisivali svoje razlomke (dakako, koristeći se samo simbolima različitim od arapskih brojki):

$$\frac{5}{11} = [3, 9, 99].$$

$$\begin{aligned}
2/3 &= [2, 6]\\
2/5 &= [3, 15]\\
3/5 &= [2, 10]\\
4/5 &= [2, 4, 20] = [2, 5, 10]\\
2/7 &= [4, 28]\\
3/7 &= [3, 11, 231] = [3, 12, 84] = [3, 14, 42]\\
&= [3, 15, 35] = [4, 6, 84] = [4, 7, 28]\\
4/7 &= [2, 14]\\
5/7 &= [2, 5, 70] = [2, 6, 21] = [2, 7, 14]\\
6/7 &= [2, 3, 42]\\
3/8 &= [3, 24] = [4, 8]\\
5/8 &= [2, 8]\\
7/8 &= [2, 3, 24] = [2, 4, 8]\\
2/9 &= [5, 45] = [6, 18]\\
4/9 &= [3, 9]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
5/9 &= [2, 18]\\
7/9 &= [2, 4, 36] = [2, 6, 9]\\
8/9 &= [2, 3, 18]\\
2/11 &= [6, 66]\\
3/11 &= [4, 44]\\
4/11 &= [3, 33]\\
5/11 &= [3, 9, 99] = [3, 11, 33] = [4, 5, 220]\\
6/11 &= [2, 22]\\
7/11 &= [2, 8, 88] = [2, 11, 22].
\end{aligned}
$$

Pronalaženje svih mogućih najkraćih prikaza egipatskih razlomaka za razlomke s malim brojnikom i nazivnikom jest zgodan problem koji se može riješiti u okviru nastave programiranja.

**Zadatak 6.** Odredi sve najkraće prikaze razlomaka $\frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}$. (Svaki od njih ima točno četiri pribrojnika)

Evo i odgovora. Prvi je razlomak pravi bogataš u tim prikazima, ima ih točno petnaest!

$$
\begin{aligned}
\frac{8}{11} &= [2, 5, 37, 4070] = [2, 5, 38, 1045]\\
&= [2, 5, 40, 440] = [2, 5, 44, 220]\\
&= [2, 5, 45, 198] = [2, 5, 55, 110]\\
&= [2, 5, 70, 77] = [2, 6, 17, 561]\\
&= [2, 6, 18, 198] = [2, 6, 21, 77]\\
&= [2, 6, 22, 66] = [2, 7, 12, 924]\\
&= [2, 7, 14, 77] = [2, 8, 10, 440]\\
&= [2, 8, 11, 88]
\end{aligned}
$$

Prikazi preostalih dvaju su:

$$
\begin{aligned}
\frac{9}{11} &= [2, 4, 15, 660] = [2, 4, 16, 176]\\
&= [2, 4, 20, 55] = [2, 4, 22, 44]\\
&= [2, 5, 10, 55]\\
\frac{10}{11} &= [2, 3, 14, 231] = [2, 3, 15, 110]\\
&= [2, 3, 22, 33].
\end{aligned}
$$

*Nastavit će se...*