# Rješavanje nekih iracionalnih jednadžbi

## sustavom algebarskih jednadžbi

*Ilija Ilišević, Osijek*

U ovom je članku obrađena jedna tema prikladna za dodatnu nastavu matematike, posebno za pripremu učenika za matematička natjecanja.

Poznato je da iracionalnim jednadžbama nazivamo jednadžbe kod kojih je nepoznanica pod korijenom. U pravilu, takve jednadžbe rješavamo tako da ih, nakon pogodnog sređivanja, potenciranjem s najmanjim zajedničkim višekratnikom eksponenata korijena, svedemo na algebarske jednadžbe, koje zatim riješimo. Kako potenciranjem ne dobivamo ekvivalentnu jednadžbu, nego jednadžbu koja ima višak korijena, potrebno je provjeriti koja od dobivenih rješenja zadovoljavaju polaznu jednadžbu.

Neke iracionalne jednadžbe su rješive samo uvođenjem novih nepoznanica. Pokazat ćemo to na nekoliko zadataka, a zatim dati određen broj zadataka za vježbu. Jednadžbe ćemo rješavati u skupu $\mathbf{R}$.

Riješite sljedeće jednadžbe:

**Zadatak 1.** $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2.$

*Rješenje.* Uvedemo nove nepoznanice

$$u=\sqrt[3]{1+x}, \quad v=\sqrt[3]{1-x}.$$

Tada dobivamo sustav

$$u+v=2, \quad u^3+v^3=2.$$

Ilija Ilišević, umirovljeni profesor III. gimnazije, Osijek

Iz prve jednadžbe sustava izrazimo $v=2-u$, a zatim uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo $u^3+(2-u)^3=2$, tj. $u^2-2u+1=0$. Rješenje ove kvadratne jednadžbe je $u=1$. Tada iz $\sqrt[3]{1+x}=1$, potenciranjem sa 3 dobivamo $1+x=1$, $x=0$. Provjera pokazuje da $0$ jest rješenje dane iracionalne jednadžbe.

*Napomena.* Danu iracionalnu jednadžbu bismo na klasičan način rješavali redom ovako:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}&=2\\
(\sqrt[3]{1+x})^3+(\sqrt[3]{1-x})^3&+\\
+3\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x})&=8\\
1+x+1-x+3\sqrt[3]{1-x^2}\cdot 2&=8\\
6\sqrt[3]{1-x^2}&=6\\
\sqrt[3]{1-x^2}&=1\\
1-x^2&=1\\
x^2&=0\\
x&=0.
\end{aligned}$$

**Zadatak 2.**

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{4-x}=\sqrt[3]{6-2x}.$$

*Rješenje.* Uvedemo nove nepoznanice:

$$\sqrt[3]{2-x}=u, \quad \sqrt[3]{4-x}=v.$$

Tada je

$$u+v=\sqrt[3]{6-2x} \qquad \text{i} \qquad u^3+v^3=6-2x.$$

Kubiranjem prve jednadžbe sustava dobivamo $u^3+v^3+3uv(u+v)=6-2x$, što zbog druge jednadžbe sustava postaje $3uv(u+v)=0$.

Odatle je $u=0$ ili $v=0$ ili $u+v=0$. Ako je $u=0$, onda je $\sqrt[3]{2-x}=0$, $x=2$; ako je $v=0$, onda je $\sqrt[3]{4-x}=0$, $x=4$, a ako je $u+v=0$, onda je $\sqrt[3]{6-2x}=0$, $x=3$. Provjera pokazuje da su brojevi 2, 3 i 4 rješenja dane iracionalne jednadžbe.

## Zadatak 3.

$$\sqrt[4]{x+3}+\sqrt[4]{94-x}=5.$$

*Rješenje.* Da bi jednadžba imala smisla, mora biti istodobno $x+3\geq 0$ i $94-x\geq 0$, tj. $x\in[-3,94]$. Uvedemo nove nepoznanice:

$$\sqrt[4]{x+3}=u\geq 0, \quad \sqrt[4]{94-x}=v\geq 0.$$

Tada je

$$u+v=5 \qquad \text{i} \qquad u^4+v^4=97.$$

Transformirajmo drugu jednadžbu, redom, na sljedeći način:

$$\begin{aligned}(u^2+v^2)^2-2u^2v^2&=97\\ \left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2&=97\\ (5^2-2uv)^2-2u^2v^2&=97\\ 625-100uv+4u^2v^2-2u^2v^2-97&=0\\ 2u^2v^2-100uv+528&=0\\ u^2v^2-50uv+264&=0.\end{aligned}$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo $uv=44$ ili $uv=6$. Dobili smo dva sustava jednadžbi: prvi je

$$u+v=5, \quad uv=44,$$

a drugi

$$u+v=5, \quad uv=6.$$

Brojevi $u$ i $v$ su prema Vièteovim pravilima rješenja dviju kvadratnih jednadžbi: $t^2-5t+44=0$ i $t^2-5t+6=0$. Prva jednadžba nema rješenja u skupu $\mathbf{R}$, a rješenja druge su $t_1=3$, $t_2=2$. Dakle, $u=3, v=2$ ili $u=2, v=3$. Tada iz $\sqrt[4]{x+3}=2$ dobivamo $x_1=13$, a iz $\sqrt[4]{x+3}=3$ dobivamo $x_2=78$. Provjera pokazuje da ti brojevi jesu rješenja dane iracionalne jednadžbe.

## Zadatak 4.

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0.$$

*Rješenje.* Da bi jednadžba imala smisla, mora biti $x-1\geq 0$, tj. $x\geq 1$. Uvedemo nove nepoznanice:

$$\sqrt[3]{2-x}=u, \quad \sqrt{x-1}=v.$$

Tada je

$$u+v=1 \qquad \text{i} \qquad u^3+v^2=1.$$

Iz prve jednadžbe sustava izrazimo $v=1-u$ i uvrstimo u drugu jednadžbu. Imamo redom

$$\begin{aligned}u^3+(1-u)^2&=1\\ u^3+u^2-2u&=0\\ u(u^2+u-2)&=0\\ u(u+2)(u-1)&=0\end{aligned}$$

$$u_1=0, \quad u_2=-2, \quad u_3=1.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2-x}&=0, \quad \text{pa je } x_1=2;\\ \sqrt[3]{2-x}&=-2, \quad \text{pa je } x_2=10;\\ \sqrt[3]{2-x}&=1, \quad \text{pa je } x_3=1.\end{aligned}$$

Provjera pokazuje da su dobiveni brojevi rješenja dane iracionalne jednadžbe.

## Zadatak 5.

$$\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}=x.$$

*Rješenje.* Da bi jednadžba imala smisla, mora biti $x^2-\frac{7}{x^2}\geq 0$, $x-\frac{7}{x^2}\geq 0$, $x>0$. Uvedemo nove nepoznanice:

$$\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}=u, \quad \sqrt{x-\frac{7}{x^2}}=v.$$

Tada je

$$u+v=x,\quad u^2-v^2=x^2-x.$$

Iz druge jednadžbe sustava dobivamo najprije $(u+v)(u-v)=x^2-x$, a zatim $x(u-v)=x(x-1)$. Kako je $x\neq 0$, slijedi da je $u-v=x-1$. Tada iz sustava jednadžbi

$$u+v=x,\quad u-v=x-1$$

dobivamo $v=\frac{1}{2}$. Stoga je $x-\frac{7}{x^2}=\frac{1}{4}$ odnosno $4x^3-x^2-28=0$. Ako posljednja jednadžba ima racionalne korijene, onda su oni jednaki kvocijentu djelitelja slobodnog člana $-28$ i vodećeg koeficijenta $4$. Kako su djelitelji broja $-28$ elementi skupa $\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm7,\pm14,\pm28\}$, a djelitelji broja 4 elementi skupa $\{\pm1,\pm2,\pm4\}$, slijedi da su kandidati za racionalne korijene elementi skupa $\left\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm7,\pm14,\pm28,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{7}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{7}{4}\right\}$. Provjeravanjem se vidi da je $x=2$ korijen jednadžbe. Tada imamo

$$\begin{aligned}4x^3-x^2-28&=4x^3-8x^2+7x^2-28\\&=4x^2(x-2)+7(x^2-4)\\&=4x^2(x-2)+7(x-2)(x+2)\\&=(x-2)(4x^2+7x+14).\end{aligned}$$

Jednadžba $4x^2+7x+14=0$ nema realne korijene. Uvrštavanjem u danu jednadžbu vidimo da je $x=2$ korijen dane iracionalne jednadžbe.

## Zadatak 6.

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{1}{\sqrt{x-3}}.$$

*Rješenje.* Da bi jednadžba imala smisla, mora biti $x+3>0$ i $x-3>0$ tj. $x>3$. Uvedemo nove nepoznanice

$$u=\sqrt{x+3},\quad v=\sqrt{x-3}.$$

Tada dobivamo sustav jednadžbi

$$\frac{1}{u}+\frac{2}{uv}=\frac{1}{v},\quad u^2-v^2=6.$$

Iz prve jednadžbe sustava, nakon množenja jednadžbe sa $uv$, dobivamo $u-v=2$, što uvršteno u drugu jednadžbu daje $2(u+v)=6$. Rješavanjem sustava

$$u-v=2,\quad u+v=3$$

dobivamo $u=\frac{5}{2}$. Tada iz $\sqrt{x+3}=\frac{5}{2}$ imamo $x=\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$, što je i rješenje dane iracionalne jednadžbe.

## Zadatak 7.

$$\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{2(x^2+4x+6)}.$$

*Rješenje.* Neka je

$$u=x^2+4x+8\geq 0,\quad v=x^2+4x+4\geq 0.$$

Tada je

$$u-v=4\quad \text{i}\quad \sqrt{u}+\sqrt{v}=\sqrt{u+v}.$$

Kvadriranjem druge jednadžbe i sređivanjem dobivamo $2\sqrt{uv}=0$, tj. $uv=0$. Tada je $u=0$ ili $v=0$. Ako je $u=0$, onda iz prve jednadžbe dobivamo $v=-4$, što ne zadovoljava uvjet $v\geq 0$. Ako je $v=0$, onda dobivamo $(x+2)^2=0$, $x=-2$. Provjera pokazuje da $x=-2$ zadovoljava danu jednadžbu, pa jest njeno rješenje.

## Zadatak 8.

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}=1.$$

*Rješenje.* Neka je $u=\sqrt{3-x}\geq 0$ i $v=\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\geq 0$, $x\neq 2$. Tada je

$$u-v=1\quad \text{i}\quad u^2-v^2=3-x-\frac{1-x}{2-x}=\frac{x^2-4x+5}{2-x}.$$

Rješavanjem sustava

$$u-v=1,\quad (u-v)(u+v)=\frac{x^2-4x+5}{2-x}$$

dobivamo

$$2u=\frac{x^2-5x+7}{2-x},$$

tj.

$$2\sqrt{3-x}=\frac{x^2-5x+7}{2-x}.$$

Odatle kvadriranjem i sređivanjem dobivamo simetričnu algebarsku jednadžbu

$$x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0.$$

Kako je $x\neq 0$, slijedi da ovu jednadžbu smijemo podijeliti sa $x^2$. Dobivamo

$$x^2-6x+11-6\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

odnosno

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=0.$$

Uvedemo zamjenu

$$x+\frac{1}{x}=t.$$

Tada je

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2,$$

pa jednadžba prelazi u

$$t^2-2-6t+11=0,$$

tj.

$$(t-3)^2=0,$$

pa je $t=3$. Slijedi

$$x+\frac{1}{x}=3.$$

Ova jednadžba se množenjem sa $x$ svodi na kvadratnu

$$x^2-3x+1=0,$$

kojoj su rješenja $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Provjerom se vidi da $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ jest, a $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ nije rješenje dane iracionalne jednadžbe.

### Zadatak 9.

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{10x+2}}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}=0.$$

*Rješenje.* Neka je $u=\sqrt{x+1}>0$ i $v=\sqrt{x-1}>0$. Tada je

$$\frac{2}{u}-\frac{\sqrt{10x+2}}{uv}+\frac{\sqrt{2}}{v}=0.$$

Iz

$$u^2=x+1,\quad v^2=x-1$$

dobivamo

$$10x+2=5u^2+5v^2+2.$$

Sada imamo sustav jednadžbi

$$u^2-v^2=2,\quad 2v-\sqrt{5u^2+5v^2+2}+\sqrt{2}u=0,$$

tj.

$$u^2-v^2=2,\quad 3u^2-4\sqrt{2}uv+v^2=-2.$$

Rješavanjem posljednjeg sustava dobivamo $u^2-\sqrt{2}uv=0$, odakle je $u_1=0$ ili $u_2=\sqrt{2}v$. Međutim, $u=0$ ne zadovoljava uvjet $u>0$. Iz $u^2-v^2=2$ i $u=\sqrt{2}v$ dobivamo $v^2=2$. Stoga je $x-1=2$, pa je $x=3$.

### Zadatak 10.

$$\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{(x-a)^2}+\sqrt[3]{x^2-a^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

*Rješenje.* Ako je $a=0$, onda je i $x=0$. Pretpostavimo da je $a\neq 0$. Neka je $u=x+a$ i $v=x-a$. Tada dana jednadžba poprima oblik

$$\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{uv}+\sqrt[3]{v^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

Množenjem ove jednadžbe sa $\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\neq 0$ dobivamo

$$u-v=\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}).$$

Dakle, imamo sustav

$$u-v=2a,\quad \sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=2\sqrt[3]{a}.$$

Kubiranjem druge jednadžbe sustava dobivamo

$$u-v-3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v})=8a,$$

tj.

$$2a-3\sqrt[3]{uv}\cdot 2\sqrt[3]{a}=8a,$$

odnosno

$$\sqrt[3]{uv}=-\sqrt[3]{a^2}.$$

Dakle,

$$u-v=2a,\quad uv=-a^2.$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo

$$u(u-2a)=-a^2,$$

tj.

$$u^2 - 2au + a^2 = 0,$$

odnosno

$$(u - a)^2 = 0.$$

Dakle, $u = a$. Tada je $x = 0$ za svaki $a \in \mathbf{R}$.

## Zadatak 11.

$$\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2},$$

$a, b \in \mathbf{R}$.

*Rješenje.* Uvedemo nove nepoznanice:

$$u = \sqrt[4]{a-x}, \quad v = \sqrt[4]{x-b}.$$

Dobivamo sustav

$$u^4 + v^4 = a - b, \quad \frac{u^4 v + uv^4}{u+v} = \frac{a-b}{2}.$$

Zamijenivši u drugoj jednadžbi sustava $a - b$ sa $u^4 + v^4$, imamo redom

$$\begin{aligned}
\frac{u^4 v + uv^4}{u+v} &= \frac{u^4 + v^4}{2} \\
2u^4 v + 2uv^4 &= u^5 + uv^4 + u^4 v + v^5 \\
u^5 + v^5 - u^4 v - uv^4 &= 0 \\
(u^5 - uv^4) - (u^4 v - v^5) &= 0 \\
u(u^4 - v^4) - v(u^4 - v^4) &= 0 \\
(u^4 - v^4)(u - v) &= 0 \\
(u-v)(u+v)(u^2+v^2)(u-v) &= 0 \\
(u-v)^2(u+v)(u^2+v^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Kako dva posljednja faktora ne mogu biti jednaki nula za $u, v \neq 0$, slijedi da je $u - v = 0$ tj. $u = v$. Tada je $a - x = x - b$, pa je $x = \dfrac{a+b}{2}$. Provjerom zaključujemo da je $x = \dfrac{a+b}{2}$ rješenje polazne jednadžbe ako je $a > b$.

## Zadatak 12.

$$\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} - \sqrt[5]{(x-1)(x-33)} = 1.$$

*Rješenje.* Neka je $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} = u$, $\sqrt[5]{(x-1)(x-33)} = v$. Tada imamo sustav

$$\begin{aligned}
u - v &= 1, \\
u^5 - v^5 &= (x-2)(x-32) - (x-1)(x-33) = 31,
\end{aligned}$$

tj.

$$u - v = 1, \quad u^5 - v^5 = 31.$$

Kako je

$$u^5 - v^5 = (u-v)(u^4 + u^3 v + u^2 v^2 + uv^3 + v^4),$$

slijedi da je

$$u^4 + u^3 v + u^2 v^2 + uv^3 + v^4 = 31. \qquad (1)$$

Potenciranjem sa 4 prve jednadžbe sustava dobivamo

$$u^4 - 4u^3 v + 6u^2 v^2 - 4uv^3 + v^4 = 1. \qquad (2)$$

Oduzevši od (1) jednakost (2) dobivamo redom

$$\begin{aligned}
5u^3 v - 5u^2 v^2 + 5uv^3 &= 30, \\
u^3 v - u^2 v^2 + uv^3 - 6 &= 0, \\
uv(u^2 + v^2) - u^2 v^2 - 6 &= 0, \\
uv\left[(u-v)^2 + 2uv\right] - u^2 v^2 - 6 &= 0, \\
uv(2uv + 1) - u^2 v^2 - 6 &= 0, \\
(uv)^2 + uv - 6 &= 0.
\end{aligned}$$

Odatle je $uv = 2$ ili $uv = -3$. Dakle, imamo dva sustava jednadžbi:

prvi: $uv = 2, \quad u - v = 1,$

drugi: $uv = -3, \quad u - v = 1.$

Drugi sustav nema realnih rješenja, a iz prvog nalazimo $u_1 = 2$, $v_1 = 1$ ili $u_2 = -1$, $v_2 = -2$. Sada lako nalazimo korijene dane jednadžbe:

$$x_{1,2} = 17 \pm \sqrt{257}, \quad x_{3,4} = 17 \pm \sqrt{224}.$$

## Zadatak 13.

$$6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

*Rješenje.* Da bi jednadžba imala smisla, mora biti $(x-2)(x-3) \geq 0$ tj. $x \in \langle -\infty, 2] \cup [3, +\infty\rangle$.

Uvedemo nove nepoznanice: $u = \sqrt[6]{x-3}$, $v = \sqrt[6]{x-2}$. Tada dobivamo sustav jednadžbi

$$6u^2 - 5uv + v^2 = 0, \quad u^6 - v^6 = -1.$$

Iz prve jednadžbe imamo redom

$$6\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\cdot\frac{u}{v} + 1 = 0$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)_{1,2} = \frac{5\pm 1}{12}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)_1 = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)_2 = \frac{1}{3}$$
$$u = \frac{1}{2}v \quad \text{ili} \quad u = \frac{1}{3}v.$$

Tada iz $\left(\frac{1}{2}v\right)^6 - v^6 = -1$ dobivamo $v^6 = \frac{64}{63}$, a iz $\left(\frac{1}{3}v\right)^6 - v^6 = -1$ dobivamo $v^6 = \frac{729}{728}$. Stoga je

$$x - 2 = \frac{64}{63}, \quad \text{pa je} \quad x = \frac{190}{63},$$

ili

$$x - 2 = \frac{729}{728}, \quad \text{pa je} \quad x = \frac{2185}{728}.$$

**Zadatak 14.**

$$2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}.$$

*Rješenje.* Da bi jednadžba imala smisla, mora biti $x^2 - 1 \geq 0$, tj. $x \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$ i $2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \geq 0$, tj. $2\sqrt[3]{x+1} \geq \sqrt[3]{x-1}$.

*Prvi slučaj.* Neka je $x \in \langle -\infty, -1]$. Tada uvodimo zamjenu

$$u = \sqrt[6]{-1-x}, \quad v = \sqrt[6]{1-x}$$

i dobivamo homogenu jednadžbu $2u^2 + uv - v^2 = 0$, tj.

$$2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \frac{u}{v} - 1 = 0.$$

Odatle je

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2} \quad \text{ili} \quad \frac{u}{v} = -1,$$

tj.

$$u = \frac{1}{2}v \quad \text{ili} \quad u = -v.$$

Stoga je

$$\sqrt[6]{-1-x} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{1-x}$$

ili

$$\sqrt[6]{-1-x} = -\sqrt[6]{1-x}.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo $x = -\frac{65}{63}$, dok druga nema rješenja.

*Drugi slučaj.* Neka je $x \in [1, +\infty\rangle$ i uvedemo zamjenu

$$u = \sqrt[6]{x+1}, \quad v = \sqrt[6]{x-1}.$$

Dobivamo homogenu jednadžbu $2u^2 - uv - v^2 = 0$, odakle je

$$\frac{u}{v} = 1 \quad \text{ili} \quad \frac{u}{v} = -\frac{1}{2},$$

tj.

$$u = v \quad \text{ili} \quad u = -\frac{1}{2}v.$$

Stoga je

$$\sqrt[6]{x+1} = \sqrt[6]{x-1}$$

ili

$$\sqrt[6]{x+1} = -\frac{1}{2}\sqrt[6]{x-1}.$$

Prva jednadžba nema rješenja, a iz druge dobivamo $x = -\frac{65}{63}$, što ne zadovoljava uvjet $x \in [1, +\infty\rangle$.

Dakle, dana iracionalna jednadžba ima rješenje $x = -\frac{65}{63}$.

**Zadatak 15.**

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+784}+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+784} - x^2} = 3.$$

*Rješenje.* Neka je

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+784}+x}{x}} \geq 0,$$
$$v = \sqrt{x\sqrt{x^2+784} - x^2} \geq 0.$$

Tada je $u - v = 3$ i

$$uv = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+784}+x}{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x^2+784}-x^2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{x^2+784})^2 - x^2} = 28.$$

Rješavajući ovaj sustav dobivamo $u = 7$, $v = 4$, ili $u = -4$, $v = -7$. Negativno rješenje otpada. Iz $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+784}+x}{x}} = 7$ dobivamo, redom,

$$\sqrt{x^2+784}+x = 49x$$
$$\sqrt{x^2+784} = 48x$$
$$x^2 = \frac{784}{2303}$$
$$x = \pm\frac{4\sqrt{47}}{47}.$$

Negativno rješenje ne zadovoljava $\sqrt{x^2+784} = 48x$, pa je $x = \frac{4\sqrt{47}}{47}$.

## Zadatci za vježbu

Riješite u skupu $\mathbf{R}$ sljedeće iracionalne jednadžbe:

1. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}} + \sqrt{5-\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}$
2. $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 4$
3. $\sqrt[3]{10-x} - \sqrt[3]{3-x} = 1$
4. $\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{4-x} = 2$
5. $\sqrt[3]{4(3x+4)} - \sqrt[3]{3(4x-7)} = 1$
6. $\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}} + \sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9} = 0$
7. $\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{x^2-1}$
8. $2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{27-14x} = 1$
9. $\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(27+x)^2} - \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} = 7$
10. $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5$
11. $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$
12. $\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[4]{x-1} = 2$
13. $\sqrt[4]{x+41} + \sqrt[4]{41-x} = 4$
14. $\sqrt[4]{80+x} + \sqrt[4]{2-x} = 4$
15. $\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{31-x} = 4$
16. $\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1 = 0$
17. $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$
18. $\sqrt[3]{4x+11} + \sqrt{3x+4} - 7 = 0$
19. $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$
20. $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$
21. $\sqrt{7x^2+8x+10} - \sqrt{7x^2-8x+10} = 2x$
22. $\sqrt{2x^2+3x+2} - \sqrt{2x^2+3x-5} = 1$
23. $\frac{1}{\sqrt{3x+10}} + \frac{6}{\sqrt{3x^2+16x+20}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
24. $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1$

### Rješenja zadataka za vježbu

**1.** $x = 64$, **2.** $x = 0$, **3.** $x \in \{2, 11\}$,
**4.** $x \in \{-4, 4\}$, **5.** $x \in \left\{-\frac{43}{12}, 4\right\}$,
**6.** $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$, **7.** $x \in \left\{0, \frac{9}{7}\right\}$,
**8.** $x \in \{-7, 0, 2\}$, **9.** $x \in \{-19, 0\}$,
**10.** $x \in \{-61, 4\}$, **11.** $x = 3$, **12.** $x = 1$,
**13.** $x \in \{-40, 40\}$, **14.** $x \in \{-79, 1\}$,
**15.** $x = 15$, **16.** $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, **17.** $x \in \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$,
**18.** $x = 4$, **19.** $x \in \{-88, -24, 3\}$, **20.** $x = 3$,
**21.** $x \in \{-1, 1\}$, **22.** $x \in \left\{-\frac{7}{2}, 2\right\}$, **23.** $x = 62$,
**24.** $x_{1,2} = 17 \pm \sqrt{257}$.


LITERATURA

1/ B. I. Aleksandrov, V. M. Maksimov, M. V. Luri, A. V. Kolesničenko (1972.): *Posobie po matematike dlja postupisiščih v vuzi*, Izdateljstvo Moskovskoga univerziteta.

2/ V. G. Boltjanski, M. V. Sidorov, M. I. Šabunin (1974.): *Lekcii i zadači po elementarnoi matematike*, Nauka, Moskva.

3/ A. E. Rudnik, L. A. Kloeva, M. S. Mosolova (1974.): *Sbornik zadač po elementarnoi matematike*, Nauka, Moskva.

4/ S. Škreblin, I. Smolec, J. Brečević (1964.): *Pregled matematike I dio*, Školska knjiga, Zagreb.