Pseudosimetrične jednadžbe

Aleksandra Floreani i
Astra Škorjanc, Osijek

Nakon obrađene cjeline *Kvadratna jednadžba* učenici znaju riješiti simetričnu jednadžbu trećeg stupnja. Onima koji žele znati malo više, sigurno ste pokazali i kako riješiti simetričnu jednadžbu 4. stupnja. To je dobar trenutak da im pokažete kako mogu upotrijebiti svoje znanje da bi riješili i pseudosimetrične jednadžbe.

Pseudosimetrične jednadžbe parnog stupnja

Algebarska jednadžba oblika

$$\begin{aligned}a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} &+ \ldots\\ &+ a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + \ldots\\ &\qquad + a_1x + a_0 = 0, \qquad (1)\end{aligned}$$

gdje su a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, $\ldots$, a_{2n-1}, $a_{2n} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je pseudosimetrična algebarska jednadžba parnog stupnja ako vrijedi

$$\frac{a_0}{a_{2n}} = \lambda^n, \quad \frac{a_1}{a_{2n-1}} = \lambda^{n-1}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \qquad (2)$$

Takve jednadžbe rješavamo tako da jednadžbu podijelimo sa x^n. Jednadžba (1) poprima oblik

$$\begin{aligned}a_{2n}x^n + a_{2n-1}x^{n-1} &+ \ldots\\ &+ a_{n+1}x + a_n + \ldots\\ &\qquad + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n} = 0,\end{aligned}$$

a zbog svojstva (2) grupiranjem po koeficijentima možemo je zapisati u obliku

$$\begin{aligned}a_{2n}\Big(x^n + \frac{\lambda^n}{x^n}\Big) + a_{2n-1}\Big(x^{n-1} + \frac{\lambda^{n-1}}{x^{n-1}}\Big) + \ldots\\ + a_{n+1}\Big(x + \frac{\lambda}{x}\Big) + a_n = 0. \qquad (3)\end{aligned}$$

Supstitucijom $x + \dfrac{\lambda}{x} = t$ jednadžbu (3) svodimo na jednadžbu n-tog stupnja koju riješimo.

Aleksandra Floreani, profesorica savjetnica, III. gimnazija Osijek, `aleksandra.floreani@skole.hr`
Astra Škorjanc, profesorica savjetnica, III. gimnazija Osijek, `astra.skorjanc@skole.hr`

Primjer 1. Riješi jednadžbu

$$4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Rješenje: Uočimo kako je $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ i $\frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$, tj. $\lambda = \frac{1}{2}$. Jednadžbu podijelimo sa x^2

$$4x^2 - 6x + 6 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

grupiramo

$$4\left(x^2 + \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{\frac{1}{2}}{x}\right) + 6 = 0,$$

te uvedemo supstituciju

$$t = x + \frac{\frac{1}{2}}{x} \quad \Big|^2$$

$$t^2 = x^2 + 2x\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2}$$

$$t^2 - 1 = x^2 + \frac{\frac{1}{4}}{x^2}.$$

Dana jednadžba prelazi u oblik

$$4(t^2 - 1) - 6t + 6 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2},$$

odakle dobivamo

$$\begin{aligned} x + \frac{\frac{1}{2}}{x} &= 1 \\ 2x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} x + \frac{\frac{1}{2}}{x} &= \frac{1}{2} \\ 2x^2 - x + 1 &= 0 \\ x_{3,4} &= \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i. \end{aligned}$$

Pseudosimetrične jednadžbe neparnog stupnja

Algebarska jednadžba oblika

$$\begin{aligned} &a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots \\ &\quad + a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots \\ &\quad\quad + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (4) \end{aligned}$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je pseudosimetrična algebarska jednadžba neparnog stupnja ako vrijedi

$$\frac{a_0}{a_{2n+1}} = \lambda^{2n+1}, \ \frac{a_1}{a_{2n}} = \lambda^{2n-1}, \ \ldots, \ \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \qquad (5)$$

Jednadžbu (4) sada možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} &a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots \\ &\quad + a_{n+1}x^{n+1} + \lambda a_{n+1}x^n + \ldots \\ &\quad\quad + \lambda^{2n-1}a_{2n}x + \lambda^{2n+1}a_{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Grupiranjem po koeficijentima dobivamo

$$\begin{aligned} &a_{2n+1}(x^{2n+1} + \lambda^{2n+1}) \\ &\quad + a_{2n}x(x^{2n-1} + \lambda^{2n-1}) + \ldots \\ &\quad\quad + a_{n+1}x^2(x + \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Primjenom formule za zbroj/razliku potencija neparnog stupnja

$$\begin{aligned} a^n \pm b^n = (a \pm b)(a^{n-1} &\mp a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \\ &\mp \ldots \mp ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

vidimo da je svaki izraz u zagradi djeljiv sa $(x + \lambda)$ što znači da je jedno rješenje $x = -\lambda$.

Primjer 2. Riješi jednadžbu

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Rješenje: Uočimo kako je $\frac{-8}{1} = \left(\frac{-2}{1}\right)^3$ i $\frac{4}{-2} = \frac{-2}{1}$. Grupiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} (x^3 - 8) - 2x(x - 2) &= 0 \\ (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 2x(x - 2) &= 0 \\ (x - 2)(x^2 + 4) &= 0, \end{aligned}$$

iz čega slijede rješenja $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm 2i$.

Zadatci

Zadatak 1. Odredi rješenja jednadžbe
$$x^3-4x^2-16x+64=0.$$

Rješenje: Grupiranjem dobivamo jednadžbu
$$(x^3+4^3)-4x(x+4)=0$$
te je faktoriziramo
$$(x+4)(x^2-4x+16-4x)=0$$
i dobivamo rješenja
$$x_1=-4,\quad x_{2,3}=4.$$

Zadatak 2. Odredi rješenja jednadžbe
$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0.$$

Rješenje: Jednadžbu dijelimo sa x^2 i grupiramo prema koeficijentima
$$\begin{aligned}&x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0 \quad \Big| :x^2\\ &x^2+4x-2-\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}=0\\ &\Big(x^2+\frac{9}{x^2}\Big)+4\Big(x-\frac{3}{x}\Big)-2=0.\end{aligned}$$
Uvodimo nepoznanicu t, te riješimo dobivenu jednadžbu
$$\begin{aligned}t=x-\frac{3}{x} &\implies t^2=x^2-6+\frac{9}{x^2}\\ &\implies x^2+\frac{9}{x^2}=t^2+6,\end{aligned}$$
$$t^2+6+4t-2=0$$
$$t_{1,2}=-2$$
Za dobivena rješenja ponovno vratimo nepoznanicu x i odredimo rješenja
$$\begin{aligned}x-\frac{3}{x}=-2 &\implies x^2+2x-3=0\\ &\implies x_{1,2}=-3,\quad x_{3,4}=1.\end{aligned}$$

Zadatak 3. Odredi rješenja jednadžbe
$$160x^5+16x^4+6x^3+3x^2+2x+5=0.$$

Rješenje: Uočimo vezu koeficijenata
$$\frac{5}{160}=\Big(\frac{1}{2}\Big)^5,\quad \frac{2}{16}=\Big(\frac{1}{2}\Big)^3,\quad \frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$
Grupiramo prema koeficijentima, te primijenimo formulu za zbroj potencija
$$\begin{aligned}&160x^5+16x^4+6x^3+3x^2+2x+5=0\\ &5(32x^5+1)+2x(8x^3+1)+3x^2(2x+1)=0\\ &5(2x+1)(16x^4-8x^3+4x^2-2x+1)\\ &\qquad +2x(2x+1)(4x^2-2x+1)\\ &\qquad\qquad +3x^2(2x+1)=0\\ &(2x+1)(80x^4-32x^3+19x^2-8x+5)=0.\end{aligned}$$
Iz sređene jednadžbe lako se vidi jedno rješenje $x_1=-\frac{1}{2}$, a ostala rješenja dobivamo iz preostale pseudosimetrične jednadžbe četvrtog stupnja $80x^4-32x^3+19x^2-8x+5=0$ koju rješavamo dijeljenjem sa x^2.
$$\begin{aligned}&80x^4-32x^3+19x^2-8x+5=0 \quad \Big| :x^2\\ &80x^2-32x+19-8\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^2}=0\\ &80\Big(x^2+\frac{\frac{1}{16}}{x^2}\Big)-32\Big(x+\frac{\frac{1}{4}}{x}\Big)+19=0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}t=x+\frac{\frac{1}{4}}{x} &\implies t^2=x^2+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{16}}{x^2}\\ &\implies x^2+\frac{\frac{1}{16}}{x^2}=t^2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$
$$80\Big(t^2-\frac{1}{2}\Big)-32t+19=0$$
$$t_1=\frac{3}{4},\quad t_2=-\frac{7}{20}$$
$$\begin{aligned}x+\frac{\frac{1}{4}}{x}=\frac{3}{4} &\implies 4x^2-3x+1=0\\ &\implies x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{8}\\ x+\frac{\frac{1}{4}}{x}=-\frac{7}{20} &\implies 20x^2+7x+5=0\\ &\implies x_{3,4}=\frac{-7\pm3\sqrt{39}i}{40}.\end{aligned}$$

Zadatak 4. Odredi rješenja jednadžbe

$$4x^6+18x^5-16x^4-102x^3+32x^2+72x-32=0.$$

Rješenje:

$$4x^6+18x^5-16x^4-102x^3+32x^2+72x-32 \quad \Big| : x^3$$

$$4x^3+18x^2-16x-102+\frac{32}{x}+\frac{72}{x^2}-\frac{32}{x^3}=0$$

$$4\Big(x^3-\frac{8}{x^3}\Big)+18\Big(x^2+\frac{4}{x^2}\Big)-16\Big(x-\frac{2}{x}\Big)-102=0$$

$$t=x-\frac{2}{x} \implies t^2=x^2-4+\frac{4}{x^2}$$
$$\implies x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4$$
$$\implies t^3=x^3-6x+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^3}$$
$$\implies x^3+\frac{8}{x^3}=t^3+6t$$

$$4\big(t^3+6t\big)+18\big(t^2+4\big)-16t-102=0$$

$$t_1=-3, \quad t_2=-\frac{5}{2}, \quad t_3=1$$

$$x-\frac{2}{x}=-3 \implies x^2+3x-2=0 \implies x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x-\frac{2}{x}=-\frac{5}{2} \implies 2x^2+5x-4=0 \implies x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{57}}{4}$$

$$x-\frac{2}{x}=1 \implies x^2-x-2=0 \implies x_5=-1, \quad x_6=2.$$

Zadatak 5. Odredi racionalna rješenja jednadžbe

$$x^7-3x^6+2x^5+5x^4+10x^3+16x^2-96x+128=0.$$

Rješenje:

$$x^7-3x^6+2x^5+5x^4+10x^3+16x^2-96x+128=0.$$

$$(x^7+128)-3x(x^5+32)+2x^2(x^3+8)+5x^3(x+2)=0$$

$$(x+2)(x^6-2x^5+4x^4-8x^3+16x^2-32x+64)-3x(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)+2x^2(x+2)(x^2-2x+4)+5x^3(x+2)=0$$

$$(x+2)(x^6-5x^5+12x^4-19x^3+48x^2-80x+64)=0$$

$$x_1=-2$$

$$x^6-5x^5+12x^4-19x^3+48x^2-80x+64=0 \quad \Big| : x^3$$

$$x^3-5x^2+12x-19+\frac{48}{x}-\frac{80}{x^2}+\frac{64}{x^3}=0$$

$$\Big(x^3+\frac{64}{x^3}\Big)-5\Big(x^2+\frac{16}{x^2}\Big)+12\Big(x+\frac{4}{x}\Big)-19=0$$

$$t=x+\frac{4}{x} \implies t^2=x^2+8+\frac{16}{x^2}$$
$$\implies x^2+\frac{16}{x^2}=t^2-8$$
$$\implies t^3=x^3+12x+\frac{48}{x}+\frac{64}{x^3}$$
$$\implies x^3+\frac{64}{x^3}=t^3-12t$$

$$(t^3-12t)-5(t^2-8)+12t-19=0$$

$$t^3-5t^2+21=0.$$

Ostala rješenja nisu racionalni brojevi.

LITERATURA

1/ I. Ilišević (2006.): *Simetrične i pseudosimetrične jednadžbe*, predavanje održano na stručnom kolokviju Udruge matematičara Osijek, 8. prosinca 2006., Osijek.

2/ `https://github.com/technetia/algebraic-solution-of-polynomial-equations`