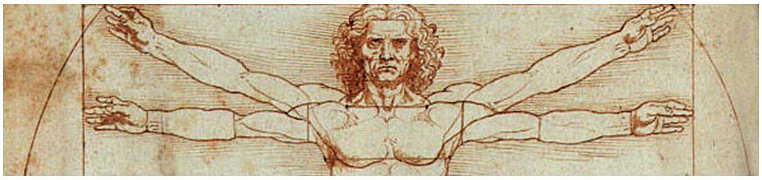
Zlatnim rezom do formule za $\sin 3^\circ$



Zrinka Franušić i
Klara Šoltić, Zagreb

Uvod

Poznato je da se s pomoću elementarne geometrije i Pitagorina poučka mogu lako odrediti vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih specijalnih šiljastih kutova $(30^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$. Štoviše, te vrijednosti često ističemo u tablici nekih trigonometrijskih vrijednosti (a očekujemo i da ih prosječan učenik trećeg razreda gimnazije zna napamet). Prirodno je pitati se možemo li pronaći eksplicitnu formulu za sinus i kosinus kuta čije su mjere u stupnjevima bilo koji cijeli brojevi. U ovom radu izvest ćemo formulu za sinus i kosinus kuta mjere 3°. Za to ćemo se koristiti poznatim vrijednostima za neke šiljaste kutove (30° i 45°), adicijskim formulama za sinus i kosinus, te svojstvima tzv. zlatnog trokuta. Nadalje, uz pomoć formula trostrukog kuta mogle bi se odrediti i eksplicitne vrijednosti za $\sin 1^\circ$ i $\cos 1^\circ$, no vidjet ćemo da je to prilično težak problem budući da se iza toga krije rješavanje jednadžbe trećeg stupnja, odnosno kubne jednadžbe.

Zlatni trokut

Najprije se prisjetimo zlatnog reza – jednog od najpoznatijih geometrijskih pojmova. Kažemo da točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza ako je omjer duljine dužine $\overline{AB}$ i duljine dužine $\overline{AC}$ jednak omjeru duljine dužine $\overline{AC}$ i duljine dužine $\overline{BC}$.

Slika 1. Zlatni rez dužine $\overline{AB}$

Popularno je još reći da je zlatni rez omjer u kojem se veći dio duljine dužine prema manjem odnosi kao duljina čitave dužine prema većem dijelu. Dakle, vrijedi

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Odgovarajućom supstitucijom pojedinih duljina dužina, to jest uz $|AC| = a$ i $|BC| = b$ dobivamo

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Otuda uz $x = \dfrac{a}{b}$ dobivamo da je

$$x = 1 + \frac{1}{x}, \tag{1}$$

pa je traženi omjer $\dfrac{a}{b}$ očito pozitivno rješenje zlatne kvadratne jednadžbe

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

odnosno

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, fran@math.hr
Klara Šoltić, mag. math. edu., solticklara2@gmail.com

Uobičajena oznaka za ovaj omjer, to jest za zlatni rez jest

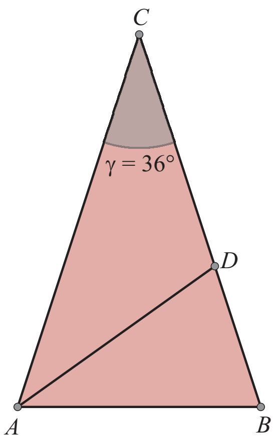
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033\ldots$$

Napomenimo da se za zlatni rez koristimo još i nazivom *božanski omjer* te latinskim nazivom *sectio aurea*. Osim u matematici, ovaj se omjer vrlo često nalazi u likovnoj umjetnosti, arhitekturi ali i prirodi, posebice u građi ljudskog tijela. Nakon puno stoljeća opažanja, danas je općenito prihvaćeno da ovaj rez predstavlja harmoniju u prirodi, a za neke i savršenstvo opaženo ljudskim okom.

Definicija 1. Jednakokračni trokut je **zlatni trokut** ako je omjer duljine kraka i duljine osnovice jednak zlatnom rezu, odnosno φ.

Zlatni trokut možemo karakterizirati veličinom njegovih kutova, to jest vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 2. *Jednakokračni trokut je zlatni trokut ako i samo ako mu je kut nasuprot osnovici jednak 36°.*



Slika 2. Zlatni trokut

Lema 3. *Neka je ΔABC zlatni trokut s osnovicom $\overline{AB}$. Neka točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru, pri čemu je $\overline{DC}$ dulji dio stranice. Tada je ΔBDA zlatni trokut.*

Dokaz. Pokazujemo da su trokuti ABC i BDA slični. U tu svrhu promotrimo najprije omjer duljina stranica u trokutu BDA, odnosno omjer $\frac{|AB|}{|BD|}$. Budući da točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom rezu, odnosno $\frac{|BC|}{|CD|} = \varphi$ slijedi

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|-|CD|}{|BC|} = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - 1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2},$$

pri čemu posljednja jednakost slijedi iz činjenice da φ zadovoljava jednadžbu (1). Dakle,

$$|BD| = \frac{1}{\varphi^2}|BC|.$$

Iz prethodne jednakosti i činjenice da je ΔABC zlatni trokut, slijedi

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \varphi^2\frac{|AB|}{|BC|} = \varphi^2\frac{1}{\varphi} = \varphi.$$

Sada možemo primijeniti S-K-S teorem o sličnosti trokuta, odnosno teorem koji kaže da su dva trokuta slična ako su im dva para stranica proporcionalna, a kutovi među njima sukladni. Konkretno, u našem je slučaju

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \varphi, \ \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD,$$

pa zaključujemo da je $\Delta ABC \sim \Delta BDA$, odnosno da je ΔBDA zlatni trokut. ■

Dokaz teorema 2. Pretpostavimo da je ΔABC zlatni trokut s osnovicom $\overline{AB}$ te da točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru, pri čemu je $\overline{DC}$ dulji dio stranice (kao u lemi 3). Pokazat ćemo da $\overline{AD}$ raspolavlja kut pri vrhu A, odnosno $\sphericalangle CAB$. Prema lemi 3 slijedi da je ΔBDA zlatni trokut, odnosno posebno i jednakokračan pa je $|AB| = |AD|$.

Nadalje, kako je trokut ABC zlatni i točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru, slijedi

$$|AB| = \frac{1}{\varphi}|BC| = \frac{1}{\varphi}(\varphi|DC|) = |DC|.$$

Iz prethodne dvije jednakosti zaključujemo da je $|AD| = |DC|$, odnosno da je trokut CAD jednakokračan. Stoga su mu kutovi uz osnovicu $\overline{AC}$ jednaki:

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DCA = \sphericalangle BCA.$$

S druge strane je $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAB$ jer su trokuti ABC i BDA slični (prema lemi 3). Dakle,

$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB$, što znači da $\overline{AD}$ raspolavlja kut pri vrhu A.

Ako kutove uz osnovicu $\overline{AB}$ trokuta ABC označimo sa α, a kut pri vrhu sa γ, onda smo upravo pokazali da vrijedi $2\gamma = \alpha$. Kako je u svakom trokutu zbroj mjera unutrašnjih kutova jednak $180°$, odnosno $2\alpha+\gamma = 180°$, slijedi da je $\alpha = 72°$, $\gamma = 36°$.

Pokažimo obrat teorema. Pretpostavimo da je ΔABC jednakokračni trokut s kutom nasuprot osnovici $\gamma = 36°$. Nadalje, pretpostavimo da je D točka na stranici $\overline{BC}$ takva da $\overline{AD}$ raspolavlja kut pri vrhu A. Tada su očito i trokuti BDA i CAD jednakokračni (jer prvi trokut ima unutrašnje kutove mjera $72°$, $72°$, $36°$, a drugi $36°$, $36°$, $108°$). Budući da su trokuti ABC i BDA slični, slijedi

$$\begin{aligned}\frac{|AB|+|BC|}{|BC|} &= \frac{|AB|}{|BC|}+1 = \frac{|BD|}{|AB|}+1\\ &= \frac{|BD|+|AB|}{|AB|}.\end{aligned}$$

Trokuti BDA i CAD su jednakokračni pa je $|AB| = |AD| = |DC|$, odnosno $|BD| + |AB| = |BC|$. Konačno, iz relacije

$$\frac{|AB|+|BC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

zaključujemo da se krak i osnovica trokuta ABC odnose u omjeru zlatnog reza pa je ΔABC zlatni trokut. ■

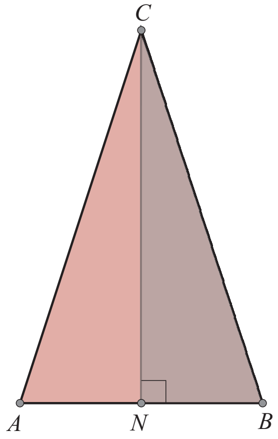
Trigonometrijske vrijednosti *malih* šiljastih kutova

Korolar 4. *Vrijedi*

$$\sin 18° = \frac{1}{2\varphi}, \quad \cos 18° = \frac{1}{2}\sqrt{\varphi+2}.$$

Dokaz. Neka je ΔABC zlatni trokut, te N nožište visine iz vrha C (slika 3). Tada je $\sphericalangle BCN = 18°$ te

$$\sin 18° = \frac{|NB|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|BC|} = \frac{1}{2\varphi}.$$



Slika 3. Pravokutni trokut u zlatnom trokutu

Otuda je

$$\begin{aligned}\cos 18° &= \sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-(\varphi-1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-\varphi^2+2\varphi+3} = \frac{1}{2}\sqrt{\varphi+2},\end{aligned}$$

jer je $\varphi^2 = \varphi + 1$. ■

Konkretno dobivamo

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Sada ćemo primijeniti *adicijske formule* za sinus i kosinus:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Korištenjem vrijednosti trigonometrijskih funkcija za specijalne kutove mjera $30°$ i $45°$, lako možemo dobiti

$$\sin 15° = \sin(45°-30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

pa je sve spremno za izračun sinusa i kosinusa vrlo malog cjelobrojnog kuta mjere samo $3°$. Dakle,

$$\begin{aligned}\sin 3° &= \sin(18°-15°)\\ &= \sin 18°\cos 15° - \cos 18°\sin 15°\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\
&\qquad - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{1}{16}\Big(\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2} \\
&\qquad -\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}\Big).
\end{aligned}
$$

Uz malo truda dobiva se i

$$
\begin{aligned}
\cos 3^\circ &= \sqrt{1-(\sin 3^\circ)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}.
\end{aligned}
$$

Jasno je da uz pomoć adicijskih formula i nešto više posla možemo eksplicitno izraziti sve trigonometrijske vrijednosti kutova čija je mjera višekratnik od 3.

Formulu za trigonometrijsku vrijednost kuta, čija je mjera proizvoljan cijeli broj, mogli bismo dobiti ukoliko bismo raspolagali konkretnim izrazom za $\sin 1^\circ$. Do njega možemo doći korištenjem *formule trostrukog kuta* za sinus

$$\sin(3\alpha) = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha. \qquad (2)$$

Dakle, $\sin 1^\circ$ je rješenje jednadžbe trećeg stupnja

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin 3^\circ = 0. \qquad (3)$$

(Tu smo se zapravo susreli s problemom *trisekcije kuta* od 3° koja se upravo svodi na jednadžbu (3).) Rješenja jednadžbe oblika $x^3+px+q=0$ dana su *Cardanovim formulama*, a uz malu se modifikaciju mogu zapisati kao

$$x_1 = u+v,\ x_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2,\ x_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon,$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}}, \\
v &= -\frac{p}{3u},\ \varepsilon = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

pri čemu se za u uzima bilo koji treći korijen (kompleksnog broja). Lako se opaža da je ε treći korijen iz jedinice, to jest $\varepsilon^3 = 1$. Zbog same prirode problema možemo zaključiti da će jednadžba (3) imati tri realna rješenja. Zaista, iz relacije (2) lako se vidi da će se uz rješenje $x_i = \sin 1^\circ$ pojaviti još i rješenja $x_j = \sin 121^\circ$ i $x_k = \sin 241^\circ$ gdje su i, j, k međusobno različiti indeksi iz $\{1,2,3\}$ (jer ne možemo sa sigurnošću tvrditi da $\sin 1^\circ$ odgovara gore danom rješenju x_1). Kako je $\sin 1^\circ \approx \sin 0^\circ = 0$, $\sin 121^\circ \approx \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.857$ i $\sin 241^\circ \approx \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.857$, numeričkom provjerom možemo ustanoviti da je

$$x_1 = \sin 121^\circ,\ x_2 = \sin 1^\circ,\ x_3 = \sin 241^\circ,$$

pri čemu smo treći korijen kompleksnog broja računali kao

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg z}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z}{3}\right)\right).$$

Nakon malo većeg algebarskog posla dobivamo sljedeći izraz za $\sin 1^\circ$:

$$\frac{1}{8\sqrt[3]{2}}\left((-1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{A+Bi}+(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{A-Bi}\right),$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
A&=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{5})+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}, \\
B&=2\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5}-1)\sqrt{2(5+\sqrt{5})}+2(8+\sqrt{3}+\sqrt{15})}.
\end{aligned}
$$

Egzaktni algebarski izrazi za sve vrijednosti sinusa cjelobrojnih šiljastih kutova, to jest za sve $\sin\alpha$, $\alpha = 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 89^\circ$ mogu se naći na internetskoj stranici `http://intmstat.com/blog/2011/06/exact-values-sin-degrees.pdf`.

LITERATURA

1/ M. Franić (2015.): *Koliko je* $\sin 9^\circ$ *i* $\cos 9^\circ$*?*, MIŠ, br. 79, 187–188.

2/ T. Koshy (2001.): *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, New York: Wiley.

3/ Kubična jednadžba, `http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html`

4/ Zlatni trokut, `www.mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html`