

Princip matematičke indukcije

Ana Ujčić, Pula

U četvrtom razredu gimnazije bavimo se principom matematičke indukcije. Iako je pred nama moćan alat, čini se da se primjena svodi na mehaničko rješavanje zadataka slijedeći strogi algoritam, ali bez dubljeg razumijevanja. Utjehu nalazimo u tome da se ipak tako ponavljaju svojstva djeljivosti, geometrija ili računanje s algebarskim izrazima koji se pojavljuju u dokazanim tvrdnjama.



Uočila sam tri glavna problema. Prvi je da učenici teško shvaćaju ideju matematičke indukcije. Drugi je da, ako shvate, često nisu uvjereni da je to valjani dokaz. Vjerojatno se razlog djelomično krije u jednom ranijem matematičkom iskustvu. Ako treba dokazati da neka tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj, mlađi učenici često pokušaju tvrdnju dokazati uvrštavanjem nekoliko prirodnih brojeva. Tada ih mi uvjerimo da to nije valjani dokaz, a sada ne vide razliku između toga i matematičke indukcije. Tvrdje da nema razlike između provjeravanja tvrdnje za brojeve 1, 2, 3 i provjeravanja za brojeve 1, n , $n + 1$. Upravo je to treći problem, dokaz implikacije. Uz pretpostavku da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n , dokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Učenici teško prihvaćaju da ovime tvrdnju nismo dokazali niti za n niti za $n + 1$. Dokazali smo da ako tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj, onda vrijedi i za njegova sljedbenika. U nastavku članka prikazat ću motivacijski primjer koji, prema mojem iskustvu, olakšava savladavanje ovih problema.

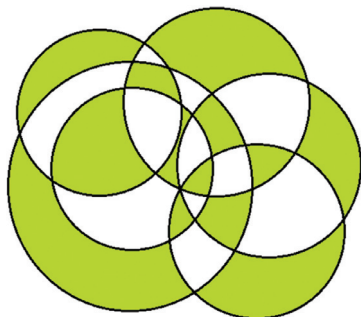
Najčešći motivacijski primjeri obuhvaćaju rušenje domino-pločica (ako srušimo prvu i ako svaka ruši sljedeću, srušit će se sve) ili ljude koji stoje u redu i prenose informaciju (ako kažemo prvome i svaki kaže sljedećem, svi će saznati). Ovo su vrlo zorni i učenicima prihvatljivi primjeri, ali problem nastaje kada treba provesti formalni dokaz matematičke tvrdnje.

Motivacijski primjer

Tvrdnja. Proizvoljnih n kružnica dijeli ravninu na područja koja je moguće obojiti dvjema bojama tako da su svaka dva susjedna područja obojena različito.

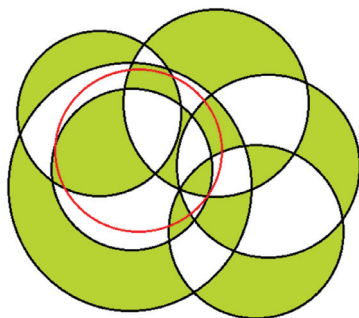
Susjednima smatramo područja koja dijele kružni luk. Područja koja dijele jednu ili dvije točke ne smatramo susjednima.

U daljnjem tekstu “dobro bojenje” označava bojenje u skladu s danom tvrdnjom. Na slici 1 vidi se primjer dobro obojenih područja za 6 kružnica.



Slika 1. Dobro obojena područja za 6 kružnica

Na početku učenicima prenosimo ideju dokaza. Razgovor može započeti od pretpostavke da je za neki broj kružnica n moguće dobro obojiti područja. Naglašavamo kako u ovoj fazi ne znamo postoji li takav prirodan broj, već “zamišljamo” da postoji. Kada bi postojao takav n , pitamo se što bismo mogli zaključiti za $n + 1$. Što bi se dogodilo da u dobro obojenu ravninu s n kružnica dodamo još jednu kružnicu (slika 2)? Može li se svaki takav slučaj dobro obojiti?

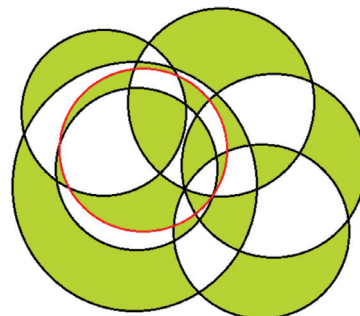


Slika 2. Dodavanje kružnice

Primijetimo da je problem nastao jedino na novoj granici koju čini dodana kružnica. Stanje možemo popraviti tako da:

- svim područjima unutar kružnice promijenimo boje
- sva područja izvan kružnice ostavimo nepromijenjenima.

Uočimo da se, neovisno o položaju dodane kružnice, ovim postupkom dobiju dobro obojena područja.



Slika 3. Promjena boja

Sljedeća je faza ključna za razumijevanje principa matematičke indukcije. Treba dobro objasniti što smo upravo dokazali, a zatim u učenicima osvijestiti potrebu za bazom indukcije. Dobro je pitati “Jesmo li ovime dokazali da je moguće obojiti područja sa n kružnica?”. Odgovor je “Ne!”, kao i na pitanje “Jesmo li ovime dokazali da je moguće obojiti područja sa $n + 1$ kružnicom?”. Dobro je i da učenici sami formuliraju zaključak “Ako je moguće za n kružnica, onda je moguće i za $n + 1$ kružnicu” ili “Moguće je za $n + 1$ kružnicu, pod uvjetom da je moguće i za n kružnica”. Ovdje se može prijeći na konkretne brojeve ističući “Ako je moguće za 100 kružnica, onda je moguće i za 101, a onda i za 102, zatim i za 103...”. Uviđamo kako je dovoljno pronaći samo jedan prirodan broj n za koji tvrdnja vrijedi pa ćemo znati i da vrijedi za svaki veći od njega. Tražimo bazu indukcije. Ako je u ravnini samo jedna kružnica, očito se može dobro obojiti. Svaki slučaj s više kružnica svodi se na dodavanje jedne po jedne kružnice i popravljanje boja.

Formalni dokaz matematičkom indukcijom

Baza indukcije. Neka je dana jedna kružnica u ravnini. Područje unutar kružnice bojimo jednom bojom, a izvan kružnice drugom bojom.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n kružnica u ravnini, za neki prirodan broj n .

Korak indukcije. Promotrimo slučaj s jednom kružnicom više ($n + 1$).

Uklonimo jednu kružnicu. Dobivena područja moguće je dobro obojiti po pretpostavci.

Vratimo uklonjenu kružnicu mijenjajući boje kako je prethodno opisano, pa tvrdnja vrijedi i za $n + 1$ kružnicu.

Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n .

i konca konstruirali i proučavali svojstva elipse. Za vrijeme odmora učenici su se zabavljali konstruiranjem elipsa i bojenjem omeđenih područja. Tada sam se sjetila ovog problema i podijelila ga s učenicima. Zaintrigirala ih je ideja da se takva tvrdnja može matematički dokazati pa smo obradili i matematičku indukciju upravo ovako kako je gore opisano. Tvrdnja koju treba dokazati je jednostavna i privlačna, dokaz se može formalno provesti, u koraku indukcije je lako objasniti da se dokazuje implikacija pa se ovaj primjer čini kao dobar izbor za upotpunjavanje popisa uobičajenih uvodnih zadataka.

Dan škole

S ovim sam se primjerom davno susrela i nisam ga koristila u nastavi. Za dan škole ove godine dogovorili smo da ćemo prva dva školska sata održati na neki neuobičajen način. Tim sam povodom u nešto opuštenijoj atmosferi obrađivala elipsu u trećem razredu. Učenici su sami uz pomoć čavlića

LITERATURA

1/ L. Lovasz, J. Pelikan, K. L. Vesztergombi (2003.):
Discrete Mathematics, Springer Verlag.

Naslovna slika preuzeta sa
<https://lifeofdeb.files.wordpress.com/2012/09/p1000981.jpg>

Večer matematike 2017.

Peta po redu Večer matematike u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva održat će se **7. prosinca u 18 sati**. Nadamo se da ćete nam se pridružiti i ove godine te se sa svojim učenicima zabaviti uz matematiku. Večer matematike 2016. imala je 95 569 sudionika te očekujemo da ćemo ove godine prijeći broj od 100 000 sudionika!

Prijave za Večer matematike već su počele ispunjavanjem mrežne prijavnice koja je dostupna na mrežnim stranicama Hrvatskog matematičkog društva. Materijali za preuzimanje bit će dostupni od 8. studenoga 2017. kada ćemo svim prijavljenim sudionicima, e-poštom poslati link za preuzimanje.

Popratna događanja organizirana u sklopu Večeri matematike bit će objavljena na mrežnim stranicama Hrvatskog matematičkog društva te Facebook stranici projekta. Ukoliko imate bilo kakvih pitanja vezanih uz Večer matematike, obratite nam se e-poštom na vecermatematike@math.hr.



Tanja Soucie, prof. i Ivana Katalenac, prof.
Organizacijski odbor Večeri matematike