

Tko je prvi...

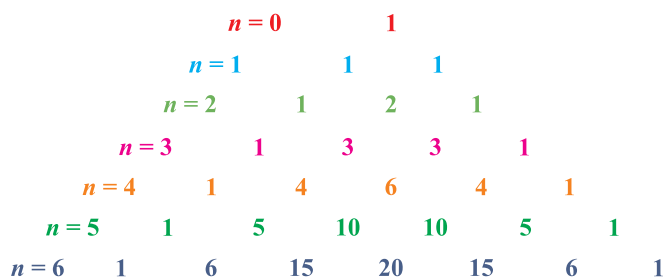
otkrio Pascalov trokut?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Vjerujem da će se mnogima pitanje iz naslova činiti besmislenim: ta valjda je Pascal otkrio trokut koji se zove po njemu! No, to definitivno nije istina. Čak je i sam Blaise Pascal, poznat kao matematičar, fizičar i filozof, bio svjestan da je taj trokut bio poznat i prije njega.

Ponovimo kratko, za svaki slučaj, što je Pascalov trokut: To je trokut u kojem su brojevi raspoređeni tako da su uz rub jedinice, svaki sljedeći red ima jedan broj više nego prethodni red, a svaki novi ne-rubni broj dobije se tako da zbrojimo dva broja iznad njega. Na slici 2 vidi se prvih 7 redaka Pascalova trokuta.

Pascalov je trokut, dobro to znamo, važan jer sadrži binomne koeficijente. Oni s jedne strane imaju kombinatorno značenje (na koliko načina od n objekata možemo odabrati njih $0, 1, 2, \dots, n$), a s druge strane su to koeficijenti u razvijenom izrazu za potencije binoma $(a + b)^n$. Poznavanje i jednog i drugog značenja brojeva u Pascalovu trokutu može se naći više stoljeća prije nego je on živio.



Slika 2. Prvih sedam redaka Pascalova trokuta

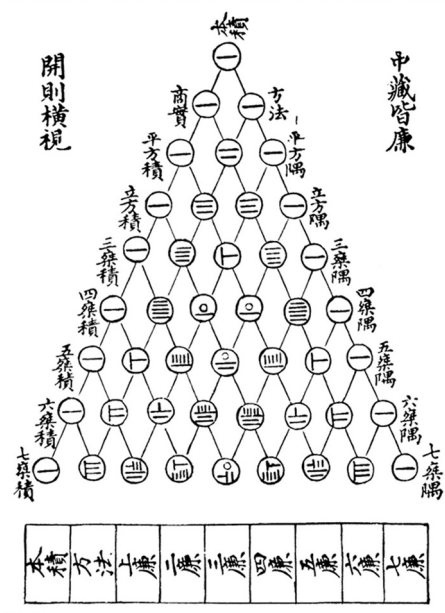


Slika 1. Blaise Pascal (1623. – 1662.) (slika označena kao public domain na Wikipediji)

U starih Indijaca se ti brojevi mogu naći vezano za određivanje n -tih korijena brojeva koristeći se razlikom $(a + b)^n - a^n$, a te su ideje od njih preuzeli srednjovjekovni matematičari islamskog svijeta (npr. al-Tusi u 13. stoljeću objašnjava konstrukciju i upotrebu tog trokuta). U 16. stoljeću ta je uloga koeficijenata iz Pascalova trokuta postala poznata i u Europi. Sam će Pascal primjerice citirati tekst *Cursus mathematicus* (1634.) autora Herigonusa u kojem se brojevi iz trokuta koriste u binomnom razvoju.

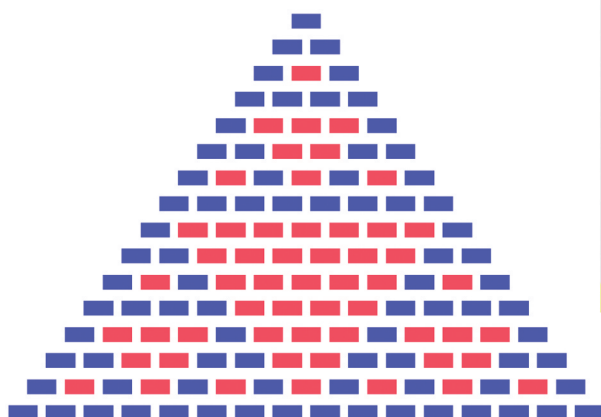
Kombinatorni je smisao brojeva u trokutu također bio poznat još starim Indijcima. Bhaskara II. u 12. stoljeću određuje razne brojne kombinacije, no

古法七乘方圖



Slika 3. Pascalov trokut u jednom kineskom tekstu iz 1303. godine.

takvi su određivani i u mnogo starijim tekstovima, a korišteno je i opisano pravilo za njihovo računanje (počevši od 2. st.). Ipak, autor ovog teksta nije našao dokaz da su stari Indijci te brojeve slagali u trokut poput našeg. To su pak učinili stari Kinezi (slika 3). U 13. stoljeću opisuje ga Yang Hui, no



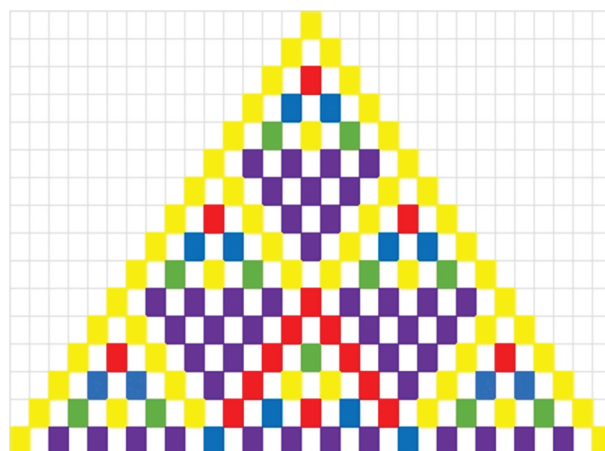
Slika 4. Pascalov trokut modulo 2 (slika izrađena s pomoću LaTeX-paketa TikZ).

poziva se na autora Jia Xiana iz 11. st., čiji tekstovi su izgubljeni. Nije poznato jesu li Kinezi za taj trokut možda saznali od Indijaca ili se pak radi o nezavisnom otkriću.

Pa zašto onda Pascalov trokut uopće zovemo Pascalovim? Odgovor je jednostavan: Zato jer je Pascal 1654. godine objavio tekst *Traité du triangle arithmétique* u kojem je detaljno opisao ne samo upotrebu brojeva iz trokuta, nego je kao prvi i dokazao razna njihova svojstva. Kao dvije zanimljivosti za kraj navodimo da je Pascal trokut nazvan po njemu još zapisivao u obliku pravokutne tablice

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
1	3	6	10	15	...
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	70	...
...					

Bojenjem pozicija u Pascalovu trokutu obzirom na ostatke brojeva pri dijeljenju s odabranim fiksnim brojem mogu se dobiti zanimljivi uzorci (na slici 4 različito su bojene pozicije parnih i neparnih brojeva, a na slici 5 boje predstavljaju ostatke pri dijeljenju sa 5).



Slika 5. Pascalov trokut modulo 5 (slika izrađena s pomoću programa MS Excel).