

Priča o jednoj diofantskoj jednadžbi

Vesna Skočir, Zagreb

Važno je reći da ova priča ne bi bila ispričana bez Brune Babića, Lare Bosnar, Luke Domaćina, Luke Markuša, Nikole Škareca i Klare Širić, maturanata X. gimnazije "Ivan Supek".

Mala djeca vole da im ponavljamo istu priču. Pritom moramo dobro paziti da sve bude zaista isto kao i prije, "od riječi do riječi". Tek kasnije bit će dopušteno, štoviše poželjno napustiti to predvidivo, ali za njih sigurno područje i "skrenuti s puta" – dopustiti da se dogodi nešto novo i zanimljivo.

No lako je upasti u zamku. Tako se u školi često vrte ista pitanja, isti zadatci "od riječi do riječi". Školska su djeca odavno prerasla takve priče. Njihova je jedina svrha osigurati dobru ocjenu. To me je podsjetilo na iskustvo učenja matematike koje je u svojoj knjizi *Što te briga što drugi misle* podijelio Richard Feynman¹:

Srećom algebru nisam naučio u školi, nego uz pomoć starog udžbenika moje tete, koji sam našao na tavanu. Tako sam shvatio da je osnovna ideja pronaći vrijednost x – svejedno je kako se dođe do rješenja. Za mene nema "aritmetičkog" ili "algebarskog rješavanja". Algebarsko rješavanje skup je pravila koja mogu dovesti do rješenja ako ih se slijepo slijedi: "Oduzmi 7 s obje strane, ako imaš množitelja, podijeli obje strane s množiteljem..."

Vesna Skočir, prof., X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb



– radi se o nizu koraka kojima se može doći do rješenja ako ti nije jasno što pokušavaš učiniti. Pravila su izmišljena zato da bi djeca koja uče algebru mogla proći na ispitu.

Možda je i to razlog što su mi se oduvijek sviđale diofantske jednadžbe – algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima kojima su rješenja u cijelim brojevima. Primjerice:

$$\begin{array}{ll} 11x + 8y = 104, & \text{rješenje: } x = 8, y = 2 \\ 3^x + 4^x = 5^x, & \text{rješenje: } x = 2 \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = 17, & \text{rješenje: } x = 4, y = 3 \end{array}$$

S njima nikad nije dosadno jer nema univerzalnog recepta koji će dovesti do rješenja²; nema ponavljanja. Ime su dobile po Diofantu, starogrčkom ma-

¹ Richard P. Feynman, *Što te briga što drugi misle*, Mozaik knjiga, Zagreb 2010., str. 15.

² Samo u posebnim slučajevima imamo preporuke koje mogu pomoći da se do rješenja dođe.

tematičaru koji je oko 250. godine u Aleksandriji proučavao algebru i teoriju brojeva. Djelomično je, u arapskom prijevodu, sačuvano njegovo djelo *Aritmetika* u kojemu se može naći dosta primjera ovakvih jednadžbi. Još od davnih vremena postoje zanimljivi diofantski problemi³ koje ponekad i nije jednostavno riješiti. Danas ih susrećemo u žanru koji je poznat pod nazivom zanimljiva/zabavna matematika. Ovaj kontinuitet zasigurno svjedoči o prirodnoj radoznalosti čovjeka i "zaigranosti" njegova uma koji ustraje u traženju rješenja ne očekujući u slučaju pozitivnog ishoda posebnu nagradu. Čini se da je užitek u rješavanju takvih problema još uvijek nepomućen.

Diofantskim se jednadžbama često koristim u nastavi informatike kod učenja programiranja. Strategija rješavanja je na neki način primitivna – dovoljno je razumjeti što se traži, uočiti koje od dozvoljenih mogućnosti zadovoljavaju rješenje, zapisati to na odgovarajući način, a potom posao prepustiti računalu. Računalo je "savršeni alat" jer omogućuje da se do rješenja dođe i onda kad je za čovjeka takav postupak vremenski prezahtjevan. Primjena matematičkoga znanja da bi se riješio ili barem pojednostavio problem, nekako se podrazumijeva.

Priča o diofantskoj jednadžbi kojoj je posvećen ovaj članak započela je nakon uspješno riješenog jednog diofantskog problema. Je li to zato što toga dana nije "prijetila" niti jedna kontrolna zadaća ili smo još malo htjeli uživati u dobro obavljenom poslu, teško je reći, ali sve se nastavilo neobaveznim razgovorom o Diofantu, grčkim matematičarima i njihovim interesima te neminovnoj usporedbi tehnologija. Činjenica da je diofantske probleme ponekad zaista teško riješiti, ali i ta da ih nije jednostavno niti sastaviti, bila je posebno intrigantna. "Da, o tome bi valjalo razmisliti", zaključili smo.⁴

Krenuli smo od jednog sustava linearnih jednadžbi koji ima cjelobrojna rješenja:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 100 \\ 4x + 6y + z &= 200.\end{aligned}$$

Rješenja ovoga sustava su redom:

$$\begin{aligned}x_1 &= 17, & y_1 &= 5, & z_1 &= 78 \\ x_2 &= 14, & y_2 &= 10, & z_2 &= 76 \\ x_3 &= 11, & y_3 &= 15, & z_3 &= 74 \\ x_4 &= 8, & y_4 &= 20, & z_4 &= 72 \\ x_5 &= 5, & y_5 &= 25, & z_5 &= 70 \\ x_6 &= 2, & y_6 &= 30, & z_6 &= 68.\end{aligned}$$

Dakle, ukupno šest rješenja. Ovaj smo sustav popćili:

$$\begin{aligned}x + y + z &= d \\ ax + by + z &= c,\end{aligned}$$

a zatim se "poigrali" koeficijentima i zapisali ih u obliku:

$$a = mt, \quad b = nt, \quad c = 10kt,$$

gdje je t neka cjelobrojna konstanta (na primjer $t = 3$), a m , n i k cjelobrojne vrijednosti koje se mijenjaju unutar određenih intervala⁵. Zatim smo napisali računalni program koji će odabrati takve koeficijente da rješenja budu cjelobrojna te posebno izdvojiti one sustave koji imaju jedinstveno rješenje. Na taj smo način relativno brzo došli do velikog broja sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 10 \\ 2x + 6y + z &= 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y + z &= 15 \\ 3x + 6y + z &= 60\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y + z &= 10 \\ 6x + 10y + z &= 60 \\ \dots &\dots \dots\end{aligned}$$

³ Primjerice *Priča o mornarima i kokosovim orasima* te priča o *Helijevoj stadi* koje možemo naći u knjizi Branimira Dakića, *Priče iz matematike*, Element, Zagreb 2016., str. 76–83.

⁴ Razgovor je započeo u rano ljeto 2016. kada su učenici završavali treći razred prirodoslovno-matematičke gimnazije. U jesen, sada već maturanti, iznenadili su me svojim razmišljanjima i idejama koje su "smjestili" u plavi fascikl na dvanaest tipkanih stranica. Materijal za tortu bio je tu, trebalo je još "samo" sve pomiješati i ispeći. Drago mi je da smo u tome ustrajali. Posebno mi je drago da je ovaj rad prezentiran na Danima Ivana Supeka, posvećenim fizičaru i filozofu, piscu i humanistu po kojemu je naša škola dobila ime. To je bio "slag na tortu".

⁵ Za početak smo pretpostavili da m i n budu u intervalu $[1, 5]$, a da k pripada intervalu $[1, 10]$.

Ovakva "hrpa" jednadžbi odjednom je prestala biti zanimljiva. Zato smo odabrali jedan od sustava i odlučili za njega sastaviti problemsku situaciju. No to nije bilo tako jednostavno kako se činilo. Sada nam tehnologija više nije mogla biti oslonac. Sastavili smo desetak zadataka s različitom tematikom, od kupovine dionica, spravljanja voćne torte do sličica Pokemona. Kad smo se nakon tjedan dana vratili tim zadatcima, nismo bili zadovoljni. Pokazalo se da je većinu tih zadataka iz ovih ili onih razloga teško zamisliti u stvarnosti. Mučili smo se s tekstom, prepravljali, odustajali i ponovno se vraćali. Na kraju smo se zaustavili na vještici jer kod nje je čini se sve moguće. Odlučili smo da to bude domaća – zagrebačka vještica. I tako je nastala priča o vještici i njenim napitcima za besmrtnost⁶:

Još kao mlada, vještica s Griča naučila je spravljanje tri jednostavna napitka za besmrtnost. Za napitak s okusom žabe dovoljan je jedan žablji krak; od jednog krokodilskog zuba dobiju se dvije bočice napitka koji vuče na krokodile, dok će jedna trula jabuka dati tek trećinu bočice jabučnog napitka za besmrtnost. Toga je dana vještica nabrojala 10 komada osnovnih sastojaka: žabljih krakova, krokodilskih zuba i trulih jabuka. Dala se na posao i napravila ukupno 10 bočica napitka. Možete li točno odrediti s koliko je žabljih krakova, koliko krokodilskih zuba, a koliko trulih jabuka raspolagala vještica toga dana?

Priču smo stavili na web-stranice naše škole⁷. Odustali smo od inače uobičajenog raspleta prema kojemu svaki problem treba odmah do detalja razriješiti jer jedino tako, uvjereni smo, budućim rješavačima možemo prenijeti dio užitka koji smo mi imali dok smo se bavili ovim zadatkom. Za mjesec, dva rješenje ćemo objaviti na stranicama naše škole:

Neka je:

- x broj žabljih krakova
- y broj krokodilskih zuba
- z broj trulih jabuka.



Od x žabljih krakova dobije se x bočica napitka dok će y krokodilskih zuba dati $2y$, a z trulih jabuka $\frac{1}{3}z$ bočica napitka. Dakle:

$$x + 2y + \frac{1}{3}z = 10. \quad (1)$$

Znamo da je

$$x + y + z = 10. \quad (2)$$

Jednadžbe (1) i (2) povlače:

$$3x + 6y + (10 - x - y) = 30,$$

to jest

$$2x = 20 - 5y = 5(4 - y).$$

Zaključujemo: 5 dijeli x . Kako je vještica na raspolaganju imala sva tri sastojka, jedino moguće rješenje je $x = 5$, što povlači $y = 2$, $z = 3$.

Toga je dana vještica imala 5 žabljih krakova, 2 krokodilska zuba i 3 trule jabuke.

⁶ "Ostatke vještičarenja" u skrivenim zakutcima zagrebačkoga Gornjeg grada fotografijama su dočarali Klara Širić i Nikola Škarec.

⁷ http://www.deseta.hr/deseta/ogl_ploca.htm