

Funkcije u nastavi matematike

– razine usvajanja i zahtjevi zadataka u hrvatskoj nastavnoj praksi

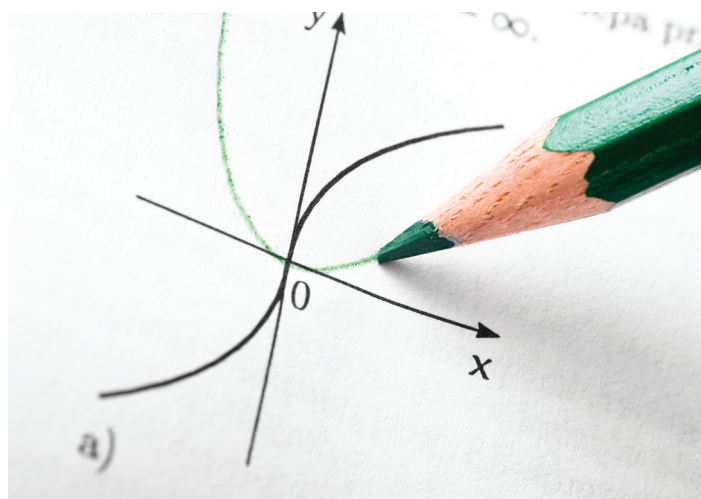
Matea Gusić, Zagreb

Pojam funkcije smatra se jednim od najvažnijih, ali ujedno i najtežih pojmova u nastavi matematike. Prilikom rada s funkcijama učenici moraju, između ostalog, uspješno manipulirati algebarskim izrazima, služiti se pojmom skupa, poznavati koordinatni sustav i interpretirati grafičke prikaze. Svaka od navedenih matematičkih ideja zasebno se smatra izuzetno zahtjevnom za učenike, a njihovo povezivanje unutar pojma funkcije čini ih još složenijima. Nadalje, za uspješno operiranje funkcijama potrebno je poznavanje matematičkog nazivlja svojstvenog funkcijama, poput argumenta funkcije, vrijednosti funkcije ili nul-točke.

Osim navedenih čimbenika, orijentiranih na složenost samih matematičkih pojmova, na uspješnost rješavanja zadanog zadatka utječe i razina usvojenosti pojma funkcije potrebna za njegovo rješavanje. U ovom radu razmatrat će se zahtjevnost zadataka uobičajenih u hrvatskoj nastavnoj praksi. Ponudit će se varijacije zadataka koje potpomažu razvoj konceptualnog razumijevanja funkcija.

Razine usvajanja pojma funkcije

Smatra se da učenici pokazuju razumijevanje funkcija ako ih poimaju na različite načine (tablično, analitički, grafički i tekstualno) te su u mogućnosti



prelaziti s jednog prikaza na drugi (Bannister, 2014). Uzevši u obzir hrvatsku nastavnu praksu, očekivano je da će učenici usvojiti procedure potrebne da funkciju zadanu analitički prikažu grafički ili "popune" odgovarajuću tablicu vrijednosti. Ovakav zadatak, iako očekuje prijelaz s jednog prikaza na drugi, ne zahtijeva više od poznavanja procedura, pa se u praksi obično pojavljuje tek kao dio složenijeg zadatka, a ne kao zaseban zahtjev. Što se zaista misli pod izjavom "uspješno prelaženje s jednog prikaza funkcije na drugi" prikazano je Primjerom 1. Radi se o uobičajenom tipu zadatka koji se u nastavi pojavljuje ubrzo nakon uvođenja kvadratne funkcije u drugom razredu gimnazijskih programa, prilikom razmatranja utjecaja koeficijenata kvadratne funkcije na njezin graf, odnosno funkcijske vrijednosti.

Primjer 1. Za koji $m \in \mathbb{R}$ funkcija

$$f(x) = mx^2 - x - 1$$

poprima negativne vrijednosti na cijelom području definicije?

Iako to nije eksplicitno traženo, za uspješno rješavanje zadatka učenici trebaju grafički interpretirati funkciju zadanu analitički. Razinu zadatka povećava činjenica da za njegovo rješavanje nije dovoljno poznavanje grafičkog prikaza kvadratne funkcije, već i svojstva njenog vodećeg koeficijenta, koje potom treba interpretirati, istodobno kako u analitičkom kontekstu, tako i u kontekstu grafa kvadratne funkcije.

Vollrath (1989.) je klasificirao učeničko razumijevanje funkcija u pet razina (tablica 1). Za potrebe razine srednjoškolskog obrazovanja dovoljne su prve tri razine: intuitivno razumijevanje pojma funkcije, razumijevanje sadržaja vezanog uz pojam funkcije i integrirano razumijevanje koncepta funkcije.

1. razina	Intuitivno razumijevanje funkcije
2. razina	Razumijevanje sadržaja vezanog uz funkcije
3. razina	Integrirano razumijevanje koncepta funkcije
4. razina	Formalno razumijevanje koncepta funkcije
5. razina	Razumijevanje strukture koncepta funkcije

Tablica 1.

Intuitivno razumijevanje podrazumijeva formiranje ideje o funkciji kao objektu te raspoznavanje situacija koje se mogu opisati funkcijskim ovisnostima. Učenici koji imaju razvijeno intuitivno razumijevanje pojma funkcije prepoznaju međusobnu ovisnost veličina i mogu ih opisati, poznaju važne situacije u kojima se veličine ponašaju funkcijski (gibanje, formiranje cijene. . .), povezuju pojmove poput grafa i tablice vrijednosti s pojmom funkcije te se koriste funkcijskim formulama za rješavanje jednostavnih problema (npr. određivanje vrijednosti funkcije). Uobičajeni zadatak na ovoj razini razumijevanja dan je Primjerom 2.

Primjer 2. Mobilni operater naplaćuje pozive prema svim mrežama 0.69 kn/min (bez uspostave poziva). Koliko ćete platiti poziv koji je trajao 0, 1, 2, 3. . . minute? Popunite tablicu 2.

Trajanje poziva (min)	0	1	2	3	4	5	8	10	15
Cijena poziva (kn)									

Tablica 2.

Razumijevanje sadržaja vezanog uz funkcije odnosi se na izgradnju poveznica između pojma funkcije i funkciji svojstvenih pojmova (argument funkcije, vrijednost funkcije, nul-točka, maksimalna vrijednost funkcije. . .). Učenici koji imaju razvijeno razumijevanje funkcija orijentirano na sadržaj koriste osnovne pojmove vezane uz funkcije, poznaju primjere važnih funkcija (linearna, kvadratna. . .), poznaju osnovna svojstva važnih primjera funkcija i koriste ih prilikom rješavanja zadataka te interpretiraju svojstva funkcija u ovisnosti o prikazu (npr. značenje nul-točke u simboličkom prikazu funkcije kao argumenta kojem je vrijednost funkcije jednaka nuli, odnosno u grafičkom prikazu funkcije kao presjeka grafa funkcije i osi apscisa). Zadatak koji podrazumijeva ovu razinu razumijevanja pojma funkcije dan je Primjerom 3.

Primjer 3. Napišite neku kvadratnu funkciju koja:

- ima jednu nul-točku,
- ima dvije nul-točke,
- nema niti jednu nul-točku.

Integrirano razumijevanje koncepta funkcije odnosi se na mogućnost formalnog izražavanja svojstva funkcija i njihovo međusobno kombiniranje. Primjer zadatka primjerenog ovoj razini razumijevanja pojma funkcije odnosio bi se na zadatak koji zahtijeva razumijevanje utjecaja koeficijenta funkcije zadane analitički na izgled grafa funkcije. Zadatak koji podrazumijeva ovu razinu razumijevanja pojma funkcije dan je Primjerom 4.

Primjer 4. Istražite kako se graf funkcije

$$f(x) = 2x^2 + bx + 1$$

mijenja s promjenom koeficijenta b .

Nastavna praksa

Prema nastavnom planu i programu za osnovne škole (MZOS, 2006.) te nastavnom programu za gimnazije (MKP, 1994.) funkcije se obrađuju uvođenjem linearne funkcije u 7. razredu osnovne škole, gradivo koje se ponavlja (i produbljuje) u prvom razredu gimnazijskog programa. Nastavlja se s kvadratnom te eksponencijalnom i logaritamskom funkcijom u drugom razredu, trigonometrijskim funkcijama u trećem razredu, dok se funkcija kao objekt prvi puta razmatra tek u četvrtom razredu. Prema hrvatskom nastavnom programu nije osigurano potrebno vrijeme za razvijanje intuitivnog razumijevanja pojma funkcije, kako prije uvođenja linearne funkcije u 7. razredu osnovne škole, tako niti prilikom obrade ostalih važnih primjera funkcija, odnosno funkcije kao objekta. Vrlo brzo nakon prvog upoznavanja s nekim od važnih primjera funkcija, učenicima se zadaju zadatci unutar kojih se podrazumijeva dobro poznavanje matematičke terminologije svojstvene za funkcije, svojstva funkcija te njihova interpretacija u različitim prikazima funkcija. Interpretiramo li zadatke u smislu potrebne razine razumijevanja pojma funkcije prema Vollrathu, možemo zaključiti da zadatci, uobičajeni u nastavi, zahtijevaju drugu ili treću razinu razumijevanja. Također, značajna karakteristika zadataka uobičajenih za hrvatsku nastavnu praksu jest i da zahtijevaju veći broj koraka prilikom rješavanja, radi čega je nužno da učenici imaju razvijenu kompetenciju planiranja strategije rješavanja zadatka.

Na primjeru dvaju zadataka na kakva redovito nailazimo u hrvatskoj nastavnoj praksi, kroz analizu strategije potrebne za njihovo rješavanje, demonstrirat će se zahtjevi koji se stavljaju pred učenike.

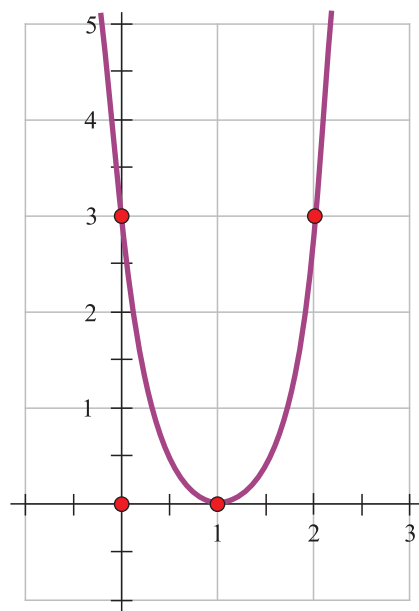
Primjer 5. Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dodiruje os x , siječe os y u točki s ordinatom 3, te prolazi točkom $A(2, 3)$. Odredite koeficijente a , b , c .

Da bi riješio ovaj zadatak, učenik prvo treba znati da je graf kvadratne funkcije parabola te svojstva

koja proizlaze iz te spoznaje. Iz podatka da graf dodiruje os x , donosi se zaključak da tjeme grafa kvadratne funkcije leži na x -osi. Kombinirajući taj zaključak s podatkom da graf funkcije siječe os y u točki s ordinatom 3, učenik može zaključiti da je otvor parabole okrenut prema gore. Zatim, primjenjujući svojstvo simetričnosti grafa kvadratne funkcije i činjenice da su u zadatku zadane točke s istom ordinatom (3), može se donijeti zaključak da tjeme parabole ima koordinate $T(1, 0)$. Tek sada, koristeći se svim zaključcima (slika 1) učenik može krenuti u rješavanje problema postavljenog u zadatku, određivanja koeficijenata kvadratne funkcije. Daljnji zahtjevi zadatka ovise o strategiji koju učenik odabere: rješavanje sustava triju jednažbi s trima nepoznanicama, korištenje tjemene ili faktorizirane "jednažbe" kvadratne funkcije.



Slika 1. Graf kvadratne funkcije zadan zadatkom iz Primjera 5.

Da bi učenik mogao krenuti u postupak određivanja koeficijenata kvadratne funkcije, morao je provesti četiri prethodna koraka zaključivanja, mahom se koristeći znanjem svojstava kvadratne funkcije.

Primjer 6. Državna matura (NCVO, 2015.)

Zadana je funkcija

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1.$$

Odredite sliku (skup svih vrijednosti) funkcije f .

U ovom zadatku važno je krenuti od matematičkog jezika, kao preduvjeta za uspješno rješavanje zadatka. Nužno je da učenici poznaju pojam koji se nalazi iza termina "slika funkcije" odnosno "skup svih vrijednosti funkcije" te da iz analitičkog zapisa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$ mogu zaključiti da se radi o formuli kvadratne funkcije. Tek s ovim saznanjima učenik može započeti misaoni proces rješavanja zadatka. Iz pojma funkcije učenik donosi zaključak da je grafički prikaz funkcije najprikladniji prilikom razmatranja funkcije kao cjeline. Zatim pojam slike funkcije interpretira, s obzirom na grafički prikaz, kao skup koji će "očitati" s y-osi. Graf kvadratne funkcije je parabola, dakle u tjemenu se postiže maksimalna ili minimalna vrijednost.

Iz $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$ učenik identificira vodeći koeficijent funkcije $a = -\frac{1}{2}$ kao manji od nule, iz čega zaključuje da je otvor parabole okrenut prema dolje, odnosno da se u tjemenu parabole postiže maksimalna vrijednost dane funkcije. Sada učenik može zaključiti da je slika funkcije interval $\text{Im}f = \langle -\infty, y_0 \rangle$, gdje je y_0 druga koordinata tjemena parabole. Za rješavanje zadatka učeniku je još jedino preostalo odrediti vrijednost y_0 , što čini koristeći se formulom $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Rješavanje ovog zadatka podrazumijevalo je dobro poznavanje nazivlja vezanog uz pojam funkcije i zahtijevalo od učenika konceptualno razumijevanje pojma funkcije radi odabira najprikladnijeg prikaza, poznavanje svojstva kvadratne funkcije i njihovu interpretaciju u ovisnosti o vrsti prikaza (analitički i grafički).

S obzirom na to da hrvatski učenici relativno uspješno rješavaju zadatke vezane uz funkcije koji su prikladni drugoj ili trećoj razini razumijevanja pojma funkcije, možemo se pitati je li problematično

što se u nastavnoj praksi rijetko pojavljuju zadaci koji se bave intuitivnom razinom razumijevanja pojma funkcije? Situaciju iz nastavne prakse do koje dolazi upravo kada se zanemaruje važnost intuitivnog razumijevanja pojma funkcije u svom radu opisuje Thompson (1994.). Prilikom rješavanja zadatka na ploči ispred razrednog odjela učenik je zapisao netočnu matematičku tvrdnju:

$$f(x) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ni on, niti jedan drugi učenik u razredu nije primijetio da sa zapisom nešto ne valja. Nakon poduljeg ispitivanja razreda po pitanju zapisanog izraza donesen je zaključak da zapis s ploče odgovara ideji učenika o funkcijama. Naime, simbol $f(x)$ njima predstavlja samo notaciju koju je nužno zapisati prilikom rješavanja zadataka s funkcijama. Osim notacije, simbol $f(x)$ nema drugog značenja niti uloge. Ovakav slučaj je uobičajena posljedica nastavne prakse koja naglasak stavlja na učenje procedura, bez formiranja "mentalnih ideja" iza simbola i pojmova, svojstvenih za intuitivnu razinu razumijevanja matematičkog pojma.

Osnovne ideje o funkcijama

Prilikom bavljenja matematičkim pojmom na apstraktnoj razini, važno je prvo kod učenika osigurati izgradnju intuitivne ideje toga pojma (Mitchellmore i White, 2014.). U tome nam može pomoći teorija o osnovnim idejama (njem. *Grundvorstellungen*). Kako bi odgovorio na pitanje "Koje se mentalne predodžbe nalaze u učeničkim umovima kada se bave matematičkim pojmovima?" Rudolf vom Hofe (1995.) je razvio teoriju o osnovnim idejama, konceptu koji opisuje vezu između matematičkih pojmova, individualnih poveznica i stvarnosti. Uloga osnovnih ideja jest da matematički pojam, po prirodi apstraktan, učenici ilustriraju (grafički ili verbalno). Tri su aspekta osnovnih ideja važna za nastavni proces: *normativni* aspekt opisuje ideju koju nastavnik želi da učenici usvoje prilikom obrade matematičkih pojmova i opisuje način kojim bi učenici trebali izgraditi novo znanje; *deskriptivni* aspekt opisuje koje se ideje zaista nalaze u mentalnoj strukturi učenika; dok se *konstruktivni* aspekt bavi generiranjem osnovnih ideja kod učenika. Za

funkcije postoje tri osnovne ideje: ideja zavisnosti, ideja promjene te ideja o funkciji kao objektu.

Ideja zavisnosti predstavlja predodžbu o funkciji kao matematičkom objektu koji opisuje vezu između dviju veličina. Uz ovu predodžbu veže se shvaćanje da je jedna veličina jednoznačno pridružena drugoj. Ova osnovna ideja usko je povezana s prikazom funkcije s pomoću tablice vrijednosti, iz koje se izravno može “iščitati” veza između argumenta i funkcijske vrijednosti. Zadatci koji aktiviraju ovu osnovnu ideju vezani su uz određivanje vrijednosti funkcije kada je zadan argument i to analitički, tablično i grafički. U hrvatskoj nastavnoj praksi zadatci ovoga tipa jesu uobičajeni, ali prevladava kontekst analitički zadanih funkcija, dok je grafički aspekt zanemaren.

Ideja promjene predstavlja predodžbu o funkciji kao objektu koji određuje (i opisuje) kakav efekt će promjena jedne veličine imati na promjenu njoj zavisne veličine. Radi se dakle o ideji karakteristične promjene (linearna, eksponencijalna). Ova osnovna ideja usko je povezana s funkcijom zadanom funkcijskom jednadžbom, ali je također važna pri identifikaciji funkcijske ovisnosti iz zadanog teksta (situacije). Možemo reći da se radi o identifikaciji “ključnih riječi” koje se vežu uz karakterističnu promjenu, poput: “Broj bakterija u uzorku povećava se za 45 % po satu”. Informacija o promjeni (broja bakterija) za konstantni postotak s obzirom na isti vremenski interval ukazuje na karakterističnu promjenu “eksponencijalnog rasta” (Malle, 2004.).

Ideja o funkciji kao objektu najviše se poklapa s hrvatskom nastavnom praksom, jer upravo zadatci koji zahtijevaju drugu i treću razinu razumijevanja pojma funkcija podrazumijevanju sagledavanje funkcije kao objekta. Za razliku od ideje zavisnosti koja gleda samo pojedinačni par zavisnih veličina, ili promjene koja se bavi karakterističnom promjenom, kod ideje o funkciji kao objektu, funkcija se promatra u cijelosti, razmatraju se svojstva koja vrijede na cijeloj domeni. Ova osnovna ideja usko je povezana s poimanjem funkcije preko grafa. Zadatci koji odgovaraju ideji funkcije kao objekta vezani su uz zadatke za čije je rješavanje nužno interpretirati graf funkcije (na cijeloj domeni), primjerice, određivanje intervala rasta i pada funkcije.

Ova se ideja aktivira pri operacijama s funkcijama, poput kompozicije funkcije te u zadacima kod kojih se promatraju važna funkcijska svojstva (parnost, periodičnost). Aktiviranje ove ideje pretpostavlja se i u zadacima tipa: “Zadana je linearna funkcija” ili “Zadana je funkcija pravilom pridruživanja $f(x) = 5x - 3$ ”.

Varijacije zadataka

Prilikom zadavanja zadataka s funkcijama korisno bi bilo voditi računa o načelu postupnosti zadajući prvo zadatke s manjim brojem zahtjeva. Također, valja zadavati zadatke koji grade intuitivno razumijevanje pojma funkcije (izgradnja i aktivacija osnovnih ideja) i povezuju čim više različitih prikaza funkcija (podjednaka zastupljenost svih prikaza trebala bi zamijeniti uobičajeno jače zastupljeni analitički prikaz).

U idućim primjerima ponudit će se varijacije zadataka, odnosno pristupa zadacima, koji mogu udovoljiti navedenim zahtjevima.

Prilikom analize Primjera 5 i 6 moglo se uočiti da zadatke s funkcijama karakterizira veliki broj koraka potrebnih za njihovo rješavanje. Upravo se u smanjenju broja potrebnih koraka nameću moguće varijacije koje osiguravaju postupnost obrade zadataka od lakših k težima. Također, smanjujući broj zahtjeva unutar zadatka dopuštamo učenicima da se koncentriraju, a time i lakše usvoje istaknuti aspekt funkcije.

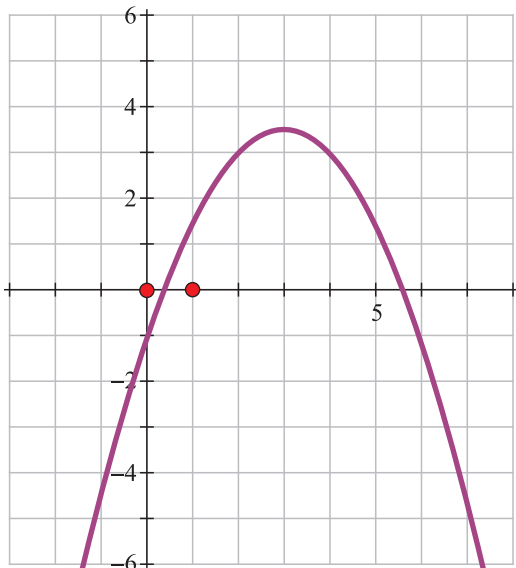
Kod zadatka danog Primjerom 5 možemo osigurati postupnost idućim varijacijama, zadajući ih redom:

Varijacija 1: *Zadan je graf kvadratne funkcije f (slika 1). Odredite koeficijente a , b , c funkcije f .*

Varijacija 2: *Zadan je graf kvadratne funkcije f (slika 1). Odredite jednadžbu funkcije f .*

Zadatak iz Primjera 6 možemo varirati na idući način:

Varijacija 3: Funkcija f zadana je grafom. Grafički odredite sliku (skup svih vrijednosti) funkcije f .



Slika 2.

Primjer 7. Opseg pravokutnika iznosi 12 cm. Za koje duljine stranica a i b je površina tog pravokutnika maksimalna?

Zadatci ovog tipa uobičajeni su u udžbenicima drugih razreda gimnazijskih programa prilikom obrade primjene kvadratne funkcije. Ponuđena varijacija ovog zadatka odnosi se na kontekst, koji osim što nudi motivaciju za rješavanjem zadatka, navodi i na istraživački pristup rješavanju, što predstavlja prvi korak rješavanja zadatka. Zadatak će dakle biti riješen na tri razine: istraživanje s pomoću tablice vrijednosti, istraživanje putem interpretacije grafa i naposljetku analitičko rješenje. Ovim pristupom rješavanja poštuje se matematičko načelo postupnosti (korištenjem prvo metoda baziranih na intuiciji, a tek naknadno strogo matematičkih), povezuju se sva četiri prikaza funkcije (zadatak zadan tekstualno, riješen redom tablično, grafički i analitički) te aktivacijom sve tri osnovne ideje razmatranjem međusobne ovisnosti veličina, karakterističnoj (kvadratnoj) promjeni površine u ovisnosti o duljini stranica pravokutnika te kvadratnoj funkciji kao cjelini prilikom interpretacije grafa funkcije, odnosno postizanja maksimalne vrijednosti.

Varijacija 4: Ana svome kućnom ljubimcu, kornjači, želi osigurati siguran prostor za dnevni odmor na području vrta. Pronašla je materijal za izradu ograde u duljini od 12 m. Kakvu bi ogradu, pravokutnog oblika, Ana trebala izraditi tako da kornjača ima čim više mjesta za "igru"?

1. korak rješavanja zadatka:
istraživanje tablicom vrijednosti

a	b	Površina
1		
2		
3		
4		
5		

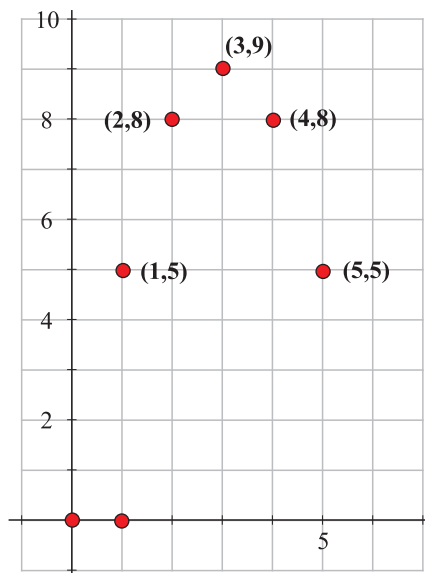
Učenici popunjavaju tablicu na temelju zaključaka o ovisnosti duljine stranice pravokutnika b o duljini stranice a zbog konstantne duljine ograde koja predstavlja opseg pravokutnika. Kod ovog pristupa raspravlja se i o smislenom zadavanju duljina stranice a (hoćemo li zapisati da je stranica a duga 6 m?). Iz tablice, u koju su uključili i necjelobrojne duljine stranica, učenici naslućuju da bi oграда kvadratnog oblika stranice duljine 3 m moglo biti rješenje zadatka.

2. korak rješavanja zadatka:
istraživanje graфом funkcije

Koristeći se ispunjenom tablicom i osnovnom idejom funkcijske zavisnosti veličina određuju se uređeni parovi oblika (a, P) : $(1, 5)$, $(2, 8)$, $(3, 9)$, $(4, 8)$, $(5, 5)$.

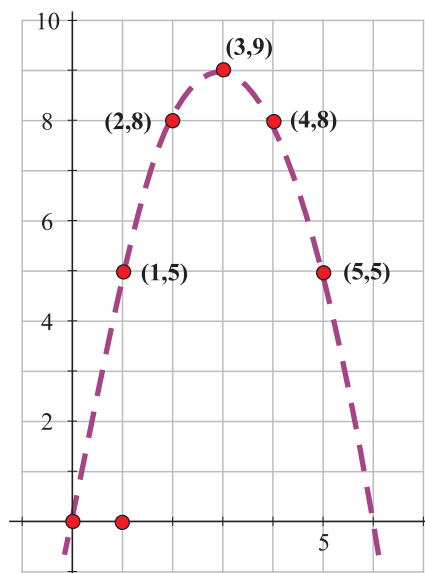
a	b	Površina
1	5	5
2	4	8
3	3	9
4	2	8
5	1	5

Uređeni parovi prikazuju se u koordinatnom sustavu:



Slika 3.

Učenici interpretiraju "raspored" točaka u koordinatnom sustavu. Naslućuju da se radi o kvadratnoj funkciji:



Slika 4.

Učenici interpretiraju svojstvo tjemena kvadratne funkcije, što ih ponovno navodi na zaključak o vjerojatnom rješenju zadatka.

3. korak rješavanja zadatka:
analitičko rješenje

Motivirano zaključcima iz drugog koraka rješavanja zadatka vodi se diskusija o karakterističnoj promjeni površine o ovisnosti o duljini stranica. Učenici zaključuju da su u prethodnim koracima prvo izrazili ovisnost duljine stranice a o duljini stranice b , preko opsega pravokutnika, što u ovom koraku zapisuju matematičkim jezikom:

$$o_{\square} = 2a + 2b$$

$$12 = 2a + 2b$$

$$b = 6 - a$$

Zatim se definira funkcija površine pravokutnika:

$$P_{\square} = a \cdot b$$

$$P_{\square} = a \cdot (6 - a)$$

$$P(a) = -a^2 + 6a$$

Interpretacijom svojstva tjemena kvadratne funkcije (koje su konkretno uočili u drugom koraku), učenici određuju argument tjemena definirane funkcije kako bi se uvjerali u točnost pretpostavke:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{6}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_0 = 3$$

Na ovaj način u trećem koraku učenici dolaze, matematički strogim putem, do rješenja zadatka, da Ana treba izraditi ogradu kvadratnog oblika, stranice duljine 3 m.

Zaključak:

Zadaci iz područja funkcija, uobičajeni u hrvatskoj nastavnoj praksi, zahtijevaju visoku razinu (druga i treća) razumijevanja pojma funkcije. Za njihovo rješavanje potrebno je dobro poznavanje matematičke terminologije svojstvene funkcijama, kao i svojstava funkcija te njihove interpretacije u različitim prikazima (naglasak na analitički i grafički prikaz). Budući da je potrebno planiranje većeg broja koraka, učenici moraju imati i dobro razvijeno proceduralno znanje, kao i stratešku kompetenciju.

Kako bi učenicima olakšali usvajanje pojma funkcije, važno je voditi računa o načelu postupnosti. Zadajući zadatke za čije je rješavanje potreban manji broj koraka, omogućujemo učenicima usmjerenje pozornosti na neki od važnih pojmova vezanih uz funkcije, čime olakšavamo njihovo usvajanje. Odabirom zadatka koji naglašavaju ideju zavisnosti dviju veličina, odnosno karakteristične promjene, omogućujemo razvijanje intuitivnog razumijevanja pojma funkcije, koje je ključno za prelazak na više razine razumijevanja.

Povezivanje različitih prikaza funkcija unutar istog matematičkog problema važno je za izgradnju potpunijeg koncepta funkcije. Ovaj zahtjev možemo ostvariti rješavanjem funkcijskog problema na više razina, unutar jednog zadatka, odnosno vodeći računa da prilikom zadavanja zadataka podjednako uvažimo različite prikaze funkcija.

LITERATURA

- 1/ V. Bannister Pitts (2014.): *Flexible Conceptions of Perspectives and Representations: An Examination of Pre-Service Mathematics Teacher's Knowledge*, International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 2(3), 223–233.
- 2/ G. Malle (2004.): *Grundvorstellungen im Mathematikunterricht, Innovations in mathematics, science and technology teaching*, In: IMST Newsletter, <https://www.imst.ac.at/imst-wiki/images/8/83/LangfassungGrundbildungMalle.pdf>, [12/01/2017].
- 3/ MKP (1994.): *Nastavni program za gimnazije*, http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/gimnazije/obvezni/matematika.pdf, [20/12/2016].
- 4/ MZOS (2006.): *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, <https://mzo.hr/sites/default/files/migrated/nastavni-plan-i-program-za-os.pdf>, [20/12/2016].
- 5/ NCVO (2015.): *Ispit državne mature iz matematike (ljetni rok) – viša razina*, <https://www.ncvvo.hr/dm-2014-2015-ljetni-rok/>, [28/12/2016].
- 6/ P.W. Thompson (1994.): *Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum*, in: Dubinsky, E., Schoenfeld, A., Kaput J. (eds). *Research in Collegiate Mathematics Education I. CBMS Issues in Mathematics Education* (pp. 21–41). Providence.
- 7/ H.-J. Vollrath (1989.): *Funktionales Denken*, *Jurnal für Mathematik-Didaktik*, 10(1): 3–37.
- 8/ M. Mitchelmore & P.White (2004.): *Abstraction in mathematics and mathematics learning*, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 28-2004)*: vol. 3, pp. 329–336.
- 9/ R. vom Hofe (1995.): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalet Heidelberg Berlin Oxford: Spektrum*.
- 10/ H.-J. Vollrath (1989.): *Funktionales Denken*, *Jurnal für Mathematik-Didaktik*, 10(1): 3–37.