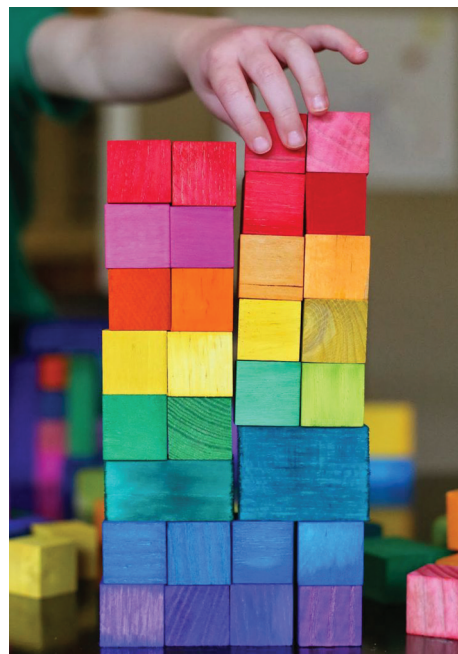


Slika vrijedi kao 1000 riječi

Goran Trupčević, Zagreb

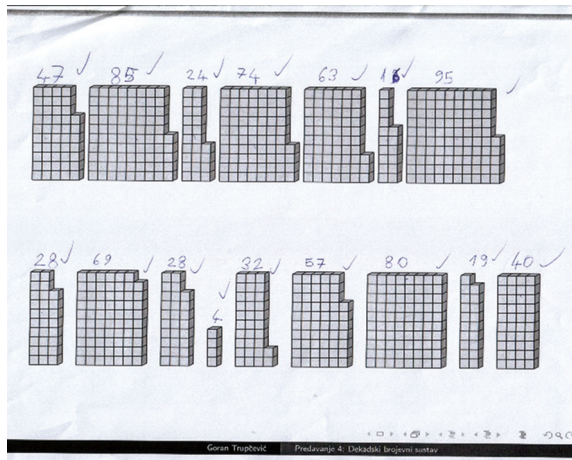
Dok sam prije nekoliko godina gledao udžbenike iz matematike za razrednu nastavu, jedna me pojava čudila. Znao sam da početna nastava matematike kreće od konkretnog, materijalnog iskustva iz kojega se potom apstrahiraju matematički pojmovi. Iz svog iskustva na studiju matematike, i kasnije rada na fakultetu, znao sam koliko važnu ulogu u tom procesu apstrakcije igraju različite slike kojima zorno prikazujemo neki fenomen, bilo stvarni, bilo matematički. Te slike nam pomažu u uočavanju odnosa, omogućavaju nam manipuliranje i eksperimentiranje, stvarno ili zamišljeno. Kada se maknemo od jednostavnijih pojmova, one su često najbliže što možemo doći nekom vidu konkretnosti. Stoga me iznenadilo kada sam uočio da se slike vrlo restriktivno koriste u školskim udžbenicima. Uglavnom je to bilo u dijelu u kojem se izlagao novi sadržaj, slike su gotovo uvijek bile zadane, s vrlo skromnim prostorom za aktivnost učenika, a i kada je on postojao, to je najčešće bilo prebrojavanje i/ili križanje. Niti jednom nisam naišao na zadatak u kojem se od učenika tražilo da nacrtaj sliku, ili da komentira ono što vidi na slici. Od tada mi se po glavi mota pitanje može li se to promijeniti, mogu li slike dobiti važniju, korisniju ulogu u nastavi? Prošle mi se godine ukazala prilika da se poigram s tom idejom.



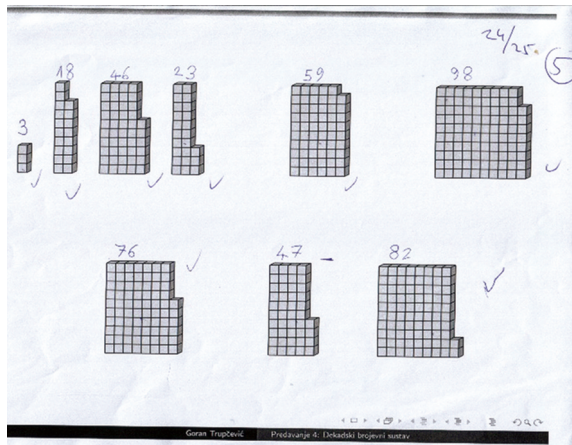
Slučajan eksperiment o (ili u) slikama

Kao što je to nerijetko slučaj, i ova priča je plod raznih slučajnosti i okolnosti. Krenulo je od toga da sam prije dvije godine zbog promuklosti počeo izrađivati prezentacije za svoja predavanja. U

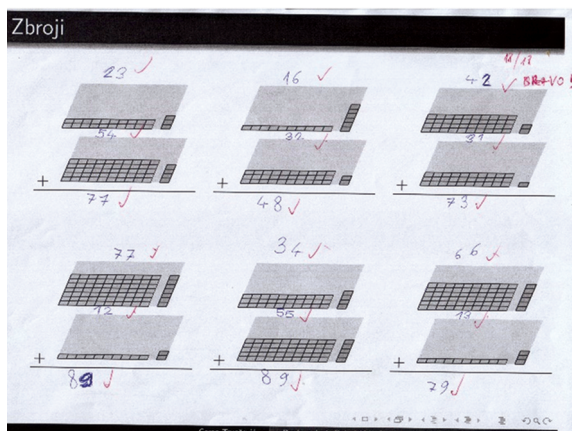
početku sam slike kojima sam želio nešto ilustrirati nalazio na internetu. Nisam uvijek bio oduševljen njima, ali su mogle poslužiti svrsi. No, kada smo u drugom semestru prešli na geometriju, više nisam mogao tako raditi. Bilo je gotovo nemoguće naći sliku koja pokazuje upravo ono što ja želim. Tako sam naučio izrađivati slike za LaTeX dokumente s pomoću paketa TikZ/PGF.



Slika 1. "Koliko ima kockica na slikama?"



Slika 2. "Koliko ima kockica na slikama?"



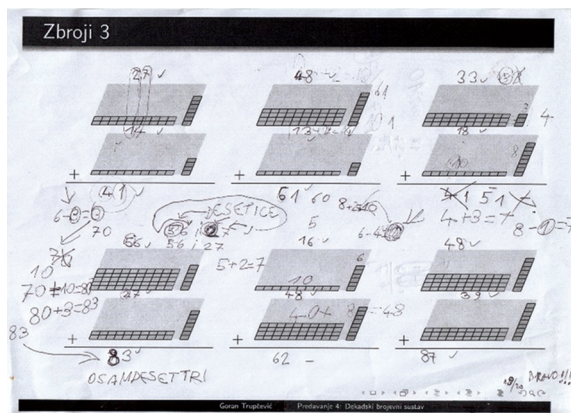
Slika 3. "Koliko kvadrata ima gore? Koliko dolje? Koliko ukupno?" – zbrajanje bez prijelaza

Kako je čitav taj proces izrade prezentacija krenuo negdje sredinom prvog semestra, tako je i završio godinu dana kasnije, također sredinom prvog semestra. Posljednja prezentacija koju sam izradio odnosila se na brojevne sustave i računanje u njima; za njene potrebe sam izradio različite procedure za prikazivanje brojeva crtajući Stern blokove i Stern kartice (vidi Jerec i Glasnović-Gracin (2014.)). Budući da mi je ostalo još vremena, krenuo sam tražiti novu aktivnost. Moja je kći tada već krenula u drugi razred, prošla su dva mjeseca od početka školske godine, i učili su brojeve do 100 i rastav na desetice i jedinice. Kako mi je ona vjerni partner u raznim matematičkim diskusijama i eksperimentima, zamolio sam je da isproba materijale koje ću ja pripremiti s pomoću slika iz posljednje prezentacije. Htio sam vidjeti kolika je mogućnost upotrebe takvih slika u razvoju postupaka zbrajanja i oduzimanja brojeva do 100. Ovo što slijedi je prikaz našeg eksperimentiranja i druženja.

Najprije sam želio da se navikne na takav slikovni prikaz brojeva pa sam joj dao zadatke sa slika 1 i 2 i zamolio ju da za svaku sliku napiše "koliko ima malih kockica na njoj?"

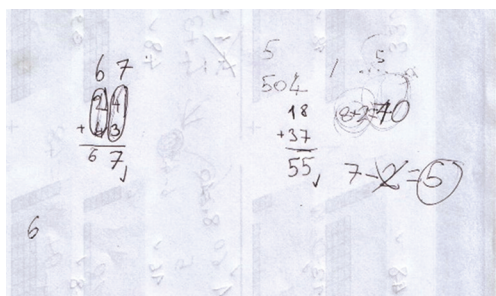
Nakon što sam se uvjerio da je povezala prikaz s brojem i da joj je jasno da su puni stupci desetice, a nepuni stupci jedinice, krenuli smo na zbrajanje bez prijelaza desetice. Zbog preglednosti sam promijenio format prikaza. Pitao sam ju da mi napiše "koliko ima kvadrata gore, koliko dolje i koliko ukupno?" Kasnije sam ju pitao da mi objasni kako je računala pa mi je objašnjavala kako je zbrajala desetice s deseticama, poslije jedinice s jedinicama i na kraju napisala koliko je to.

Uslijedio je meni najzanimljiviji dio – zbrajanje s prijelazom desetica. Uputa je bila kao i ranije – "koliko ima gore, koliko dolje, i koliko ukupno?" Od šest zadataka, četiri je točno riješila. Pri objašnjavanju je ponovno zbrajala najprije desetice s deseticama pa jedinice s jedinicama i na kraju bi deseticama dodala tu jednu novu deseticu ako bi ju dobila. Ujedno je, dok je objašnjavala, uočila pogreške koje je napravila te je u trećem zadatku i ispravila rješenje.



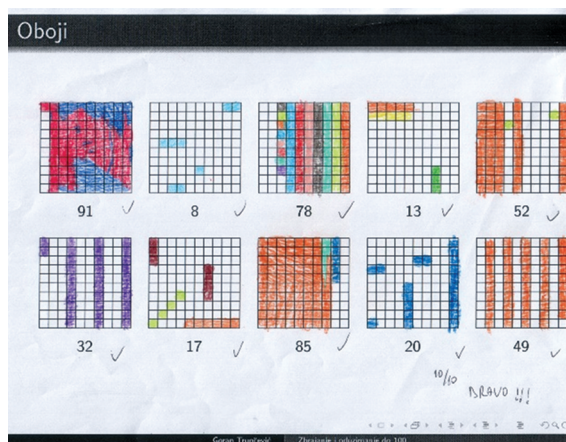
Slika 4. "Koliko kvadrata ima gore? Koliko dolje? Koliko ukupno?" – zbrajanje s prijelazom

Na kraju prvog dijela našeg druženja uz zadatke, dao sam joj još dva zadatka, ovaj put samo s brojkama, da vidim hoće li uspjeti generalizirati postupak. Pribrojnik sam zapisao kao kod pisanog zbrajanja, jedan ispod drugog. Prvi je zadatak bio bez prijelaza, a drugi sa, i oba je točno riješila. No ovaj put je spontano najprije zbrajala jedinice, a potom desetice. Kad mi je poslije objašnjavala kako je riješila, pitao sam ju zašto je sada na taj način zbrajala. Rekla je "Ne znam... Možda zato da vidim hoću li dobiti još jednu deseticu ili ne."



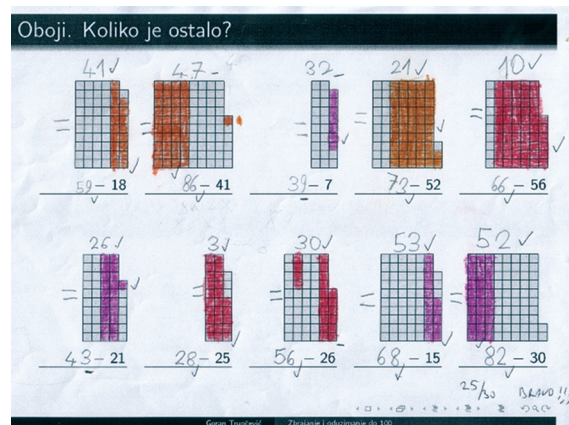
Slika 5. Pisano zbrajanje – prijenos na simboličku razinu

Činilo mi se važnim da, prije no što krenemo na oduzimanje, dam kćeri priliku da ona sama prikaže određeni dvoznamenkasti broj s pomoću kvadrata. Dao sam joj listić, uz uputu "oboji onoliko kvadrata koliko piše na slici". Na slici 6 vidimo kreativno rješenje tog zadatka.



Slika 6. "Oboji onoliko kvadrata koliko piše!" – prikazivanje broja s pomoću slike

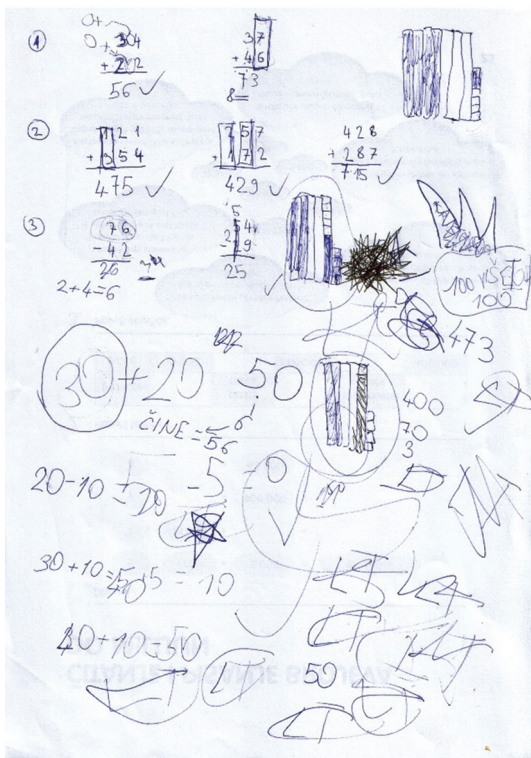
Međutim, kad je zadatak postao složeniji, kreativnost je ustupila mjesto funkcionalnosti. Uputa je bila "Koliko ima kvadrata? Oboji onoliko kvadrata koliko piše ispod slike. Koliko je kvadrata ostalo neobojeno?" Sada je bojala tako da joj bude lakše odrediti koliko je ostalo.



Slika 7. "Koliko ima kvadrata? Oboji koliko piše! Koliko ih je ostalo neobojeno?" – oduzimanje bez prijelaza

Idući smo put zaključili da nam se više ne da rješavati zadatke zbrajanja i oduzimanja. Predložio sam joj da riješi još tri zadatka. Htio sam vidjeti sjeća li se još zbrajanja dvoznamenkastih brojeva, može li ga generalizirati na zbrajanje troznamenkastih brojeva i, na koncu, hoće li generalizirati oduzimanje na simboličku razinu. Prva dva

zadatka je točno riješila, čak i u slučaju zbrajanja troznamenkastih brojeva uz prijelaz desetica i stotica. Kod oduzimanja je pogriješila. U prvom slučaju ($76 - 42$) je računala $70 - 40 = 30$, $6 - 2 = 4$, $30 - 4 = 26$. Međutim, u drugom slučaju ($54 - 29$) je imala $50 - 20 = 30$, $4 - 9 = 5$, $30 - 5 = 25$, što je točno rješenje. Kasnije mi nije znala objasniti zašto je tako postupala. Vjerojatno bi joj bilo jasnije da je taj prijelaz na simboličko napravljen uz slikovni prikaz, odnosno da je imala priliku rješavati i zadatke oduzimanja s prijelazom desetica s pomoću slikovnog prikaza. Također mi se čini zanimljivim da je ovakvim postupkom u drugom slučaju dobila novi algoritam za računanje. Moguće je da bi kroz neku organiziranu diskusiju, i dodatno istraživanje, mogla doći do zaključka kada tu razliku jedinica treba oduzeti, a kada dodati razlici desetica. Na taj bi način razvila "novi" algoritam računanja, različit od onih koje nalazimo u udžbenicima.



Slika 8. Pisano zbrajanje i oduzimanje

Slike, matematika i učenje matematike

Iz Piagetovih istraživanja (vidi npr. Liebeck, 2010.) znamo kako se znanje ne uspostavlja u konačnom, gotovom obliku, već se taj proces odvija kroz faze u kojima se pomičemo od konkretnog prema apstraktnom, od neposrednog iskustva ka zamislivom (ili nezamislivom). U tome važnu ulogu igraju tri različita sustava o kojima govori Jerome Bruner (1966.):

“Ono što slijedi iz ovoga je pogled na ljudska bića koja su razvila tri paralelna sustava za obradu i prikazivanje informacija – jedan manipulacijom i djelovanjem, jedan kroz organizaciju percepcije i slike, a jedan kroz simbolički aparat. To ne znači da su to “faze” u bilo kakvom smislu; oni su prije različiti naglasci u procesu razvoja. Na primjer, morate dobiti percepcijsko polje organizirano oko vlastite osobe kao centra prije no što uspostavite i druge, manje egocentrične osi u njemu. Na kraju, čini se da je zreli organizam prošao kroz proces elaboracije triju sustava vještina koje odgovaraju trima glavnim sustavima alata kroz koje se mora povezati kako bi potpuno izrazio svoje kapacitete – alati za ruke, za receptore na daljinu, te za proces refleksije.”

Mason i Johnston-Wilder (2004.) govore o ta tri sustava kao o “tri svijeta” koja su u svojevrsnom dijalogu. U procesu obrazovanja, za elaboraciju i uspostavljanje veza između ta tri svijeta, važnu ulogu će, uz unutrašnji dijalog, činiti i vanjski dijalog s drugima.

Iz mojeg shvaćanja Brunerove (1966.) teorije o tri moda spoznaje, odnosno Mason i Johnston-Wilderine (2004.) usporedbe o “tri različita, ali povezana, svijeta”, čini mi se da je važno zadržati distinkciju između njih, uz neprestano uspostavljanje veza. Na to sam posebno pazio pri formiranju pitanja – kada sam na početku želio da poveže sliku s brojem, pitao sam je “koliko kvadratića ima na slici?”. Čini mi se da bi s pitanjem poput “koji je to broj?” pomiješao vizualno i simboličko. Tako bi možda slika koja prikazuje broj 23 i sam broj postali

isto pa više ne bih broj 23 mogao slikovno prikazivati na više različitih načina. Ujedno mi se čini da bi se tako i uspostavio hijerarhijski odnos simboličkog nad vizualnim. Slično sam postupao i kasnije; sva pitanja koja sam postavljao kćeri odnosila su se na ono što se nalazilo na slikama; tj. bila su primjerena vizualnom svijetu. Pitanja o brojevima ostavljao sam za misaoni/simbolički svijet.

Brunerovu teoriju o različitim povezanim modovima spoznaje potvrđuju novija istraživanja iz područja kognitivne neuroznanosti, o čemu govore britansko-američka metodičarka matematike Jo Boaler i njeni suradnici (2016.). Oni navode rezultate istraživanja s pomoću fMRI tehnologije koji pokazuju kako se pri rješavanju simbolički zadanih problema poput računanja 12·25, ili složenijih, aktiviraju različiti dijelovi mozga zaduženi za prostorno-vizualno procesiranje. Stoga ne čude rezultati istraživanja koji pokazuju da rješavanje vizualnih matematičkih problema pomaže učenicima u postizanju uspjeha u matematici. Osim vizualnog, Boaler i suradnici se osvrću i na konkretno-manipulativni aspekt učenja matematike kroz računanje s pomoću prstiju. Taj, naizgled primitivni, i ponekad stigmatizirani, način matematičkog djelovanja/razmišljanja/aktivnosti se pokazao toliko važnim u uspostavi razumijevanja matematike, da se pokazalo kako je percepcija i reprezentacija prstiju u početnom obrazovanju bolji prediktor kasnijeg uspjeha u matematici od standardnih testova kognitivnog procesiranja. Potvrdu toga možemo pronaći u neurološkim istraživanjima koja su utvrdila kako se dijelovi mozga zaduženi za percepciju i reprezentaciju prstiju aktiviraju i pri složenim računanjima kod učenika viših razreda. Ta veza između senzomotornog sustava i matematičkih sposobnosti trajno ostaje upisana u ljudski mozak.

Stoga nam ne treba biti teško prihvatiti Brunerovu tezu o trima sustavima, kroz koje spoznajemo svijet, i početi govoriti o utjelovljenom procesu učenja matematike¹.

O povezanosti matematičkog razmišljanja i učenja matematike s jedne, i slika, s druge strane, govorili su mnogi. Tako Grayson Wheatley, američki metodičar, kaže: "Svo smisleno učenje matematike je zasnovano na slikama (engl. *image-based*). Iako mogu postojati određeni oblici matematičkog rasuđivanja za koje se čini da ne koriste slike, većina matematičkih aktivnosti ima prostornu komponentu. Ako je školska matematika proceduralna, učenici mogu propustiti razvoj njihovih sposobnosti formiranja mentalnih slika matematičkih pravilnosti (engl. *patterns*) i odnosa. Dobro je dokumentirana činjenica da učenici koji rasuđuju koristeći slike postaju sposobni učenici matematike. Nadalje, znamo da sposobnost učinkovitog korištenja slika u matematici može biti razvijena. Kad su učenici poticani razvijati mentalne slike i koristiti se tim slikama u matematici, oni pokazuju iznenađujuću rast. Svi učenici mogu naučiti koristiti se slikama učinkovito." Pri čitanju Wheatleyevih razmišljanja prisjetio sam se predavanja Mirka Polonija, profesora na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu, iz euklidske geometrije – njegova mahanja rukama po zraku, njegove molbe studentima da mu "pridrže točke" (kako ove ne bi pobjegle), pokazivanje zamišljenih pravaca i ravnina u prostoru, i odnošenje prema njima kao da zaista tamo stoje... Uvjeren sam da je takvim pristupom duboko pridonio formiranju ideje u nama o važnosti slika u matematici, o našoj sposobnosti da ih shvaćamo kao stvarne (opredmećene) i da njima manipuliramo.

Jedan od razloga zašto se slike tako malo koriste u našim udžbenicima mogao bi biti upravo nesхваćanje tog njihovog dinamičkog aspekta. Naglašava ga i Caleb Gattegno (1971.): "Pitajući učenike da zatvore oči i mentalnim slikama odgovore na verbalne izjave izgovorene od strane učitelja, on ih čini svjesnima: da su u njihovom umu slike povezane s ostatkom njihovog iskustva, da je to samo po sebi sposobnost (koju posjeduju). Dosta, ova vrsta odnosa između učitelja i učenika može biti iskorištena za generiranje čitavih poglavlja matematike. Ključ ovdje je dinamički atribut slike, što se može vidjeti kao ekvivalent određenih

¹ Jedna poznata hrvatska koreografkinja mi je u razgovoru rekla kako su svi matematičari s kojima je radila kao koreograf na drugačiji način doživljavali prostor od ostalih plesača. Objašnjenje njenog opažanja prepuštam čitateljima.

matematičkih svojstava." Te su me misli vodile pri osmišljavanju mojih zadataka, u kojima se najprije misaono, kod zbrajanja, a kasnije, kod oduzimanja, i stvarno manipulira slikama. Otključavanjem slika za manipulaciju, otključavamo i njihov potencijal u prikazivanju i rješavanju problema.

Za kraj (ili početak)...

Ali ovo zapravo nije teorijski članak o važnosti vizualnog prikaza za učenje matematike. Ovo je prije svega priča o osobnom, kućnom iskustvu potrage za drukčijim načinom korištenja slika u učenju matematike. Moj suputnik na tom putu bila je moja kći, koja je tada išla u drugi razred. Ono što smo dobili nipošto nije metodička uputa kako treba učiti/poučavati matematiku, već stvaranje novog prostora mogućnosti. I to na dvije razine – s jedne strane to je razina korištenja slika u učenju matematike. S druge, to je korištenje najrazličitijih prilika za vlastito istraživanje i propitivanje.

Post skriptum

Prije nekoliko dana dao sam kćeri tekst da ga pročita i da mi dozvolu za objavljivanje. Iako su joj neke riječi bile potpuno strane, pročitala ga je u jednom dahu i rekla "Može. Možeš mi još neke zadatke dati?"

U školi upravo rade zbrajanje troznamenkastih brojeva – zbrajanje s prijelazom stotica. Gledao sam je dok je rješavala domaću zadaću.

"Hm, u prvom zadatku su samo prijelazi desetica? Nema prijelaza stotica?"

"Pa ne, to smo tek danas radili."

Potom sam primijetio da su idućih par zadataka svi bili isključivo s prijelazom stotica.

"Ali ti bi znala riješiti i s prijelazom i stotica i desetica, to si već radila, zar ne?"

"Ne znam (bih li mogla), to još nismo učili."

LITERATURA

- 1/ J. Boaler, L. Chen, C. Williams, M. Cordero (2016.): *Seeing as Understanding: The importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning*, <https://www.youcubed.org/visual-math/>
- 2/ J. Bruner (1966.): *Toward a Theory of Instruction*, Harvard University Press, Cambridge, MA.
- 3/ C. Gattegno (1971.): *What we owe children: The subordination of teaching to learning*, Routledge & Kegan Paul, London.
- 4/ H. Jerec, D. Glasnović Gracin (2014): Stern blokovi, *Matematika i škola* 64, str. 154 – 159.
- 5/ P. Liebeck (1995.): *Kako djeca uče matematiku*, Educa, Zagreb.
- 6/ J. Mason, S. Johnston-Wilder (2004.): *Fundamental Constructs in Mathematics Education*, RoutledgeFalmer & Open University, London.
- 7/ G. Wheatley: *Quick Draw: A simple warm-up exercise helps students develop mental imagery of mathematics*, <http://www.learnnc.org/lp/editions/pcmath/787>

Državni stručni skup matematičara u Svetom Martinu na Muri

Agencija za odgoj i obrazovanje organizira državni stručni skup za učitelje i nastavnike matematike u Svetom Martinu na Muri **od 26. do 28. lipnja 2017.** Tema skupa je **Vrednovanje u matematičkom obrazovanju**: o vrednovanju općenito, o vrednovanju potencijalno darovitih učenika i o vrednovanju učenika s teškoćama. Prijave za skup su moguće na <http://ettaedu.azoo.hr/>.