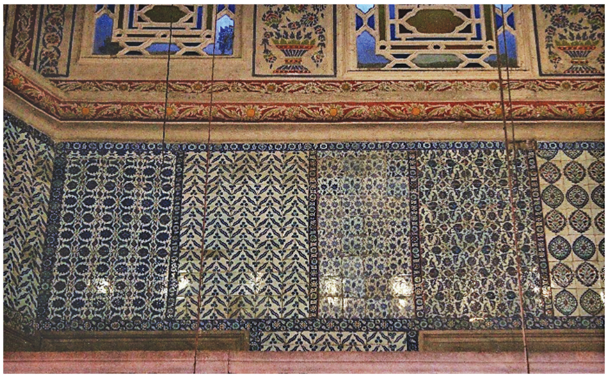
Tko je prvi ...
dokazao da postoje samo tri pravilna popločivanja ravnine?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Matematički pojam popločivanja nije dalek od njegove svakodnevne uporabe: popločivanje ravnine je njeno prekrivanje "pločicama", tako da nema preklapanja niti razmaka među njima (nemamo "grbavi" zid kupaonice). Glavna razlika je što matematičari gledaju popločivanje čitave, beskonačne, ravnine, dok će keramičar uzeti samo neki ograničen isječak popločivanja.

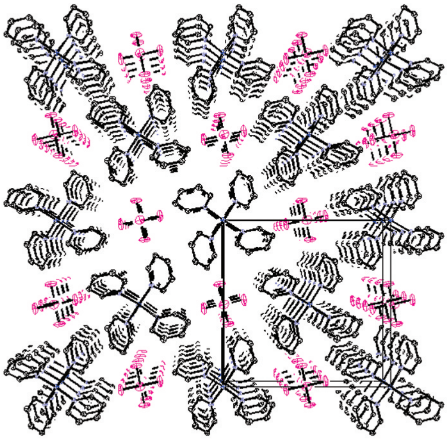


Slika 1. Popločivanja u "Plavoj džamiji" (Sultan Ahmet Camii) u Istanbulu. Fotografija: ©FMB2015.

Slika 2. Popločivanje na trgu Praça de D. Pedro IV u Lisabonu. Fotografija: ©FMB2015.

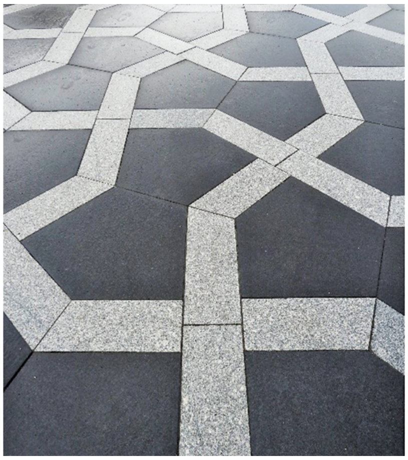
Popločivanja se prije svega, osim u kupaonici i kuhinji, pojavljuju u umjetnosti, osobito muslimanskog svijeta (slika 1) ili na i u portugalskim zgradama (slika 2) te njihova trodimenzionalna verzija kao model unutrašnje građe kristala (slika 3).

Neka popločivanja su periodička (slika 4): možemo naći dva neparalelna smjera, tako da se u tim smjerovima u jednakim razmacima uzorak ponavlja (u beskonačnost). Sve tri slike 1, 2 i 3 prikazuju isječke periodičkih popločivanja.



Slika 3. Prikaz unutrašnje građe jednog kristala. Za sliku zahvaljujem V. Stilinoviću s Kemijskog odsjeka PMF-a.

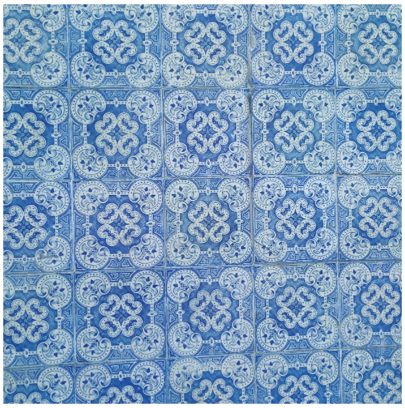
doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler, Zavod za matematičku analizu, PMF–Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, fmbquak@gmail.com



Slika 4. Periodičko popločivanje na ulici u Kopenhagenu. Fotografija: ©FMB2013.

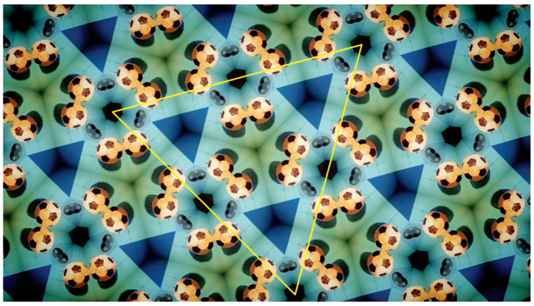
Među periodičkim popločivanjima postoje neka koja su posebno pravilna: sve pločice su sukladni pravilni mnogokuti. Ta su popločivanja u svijetu popločivanja nešto poput Platonovih tijela u svijetu poliedara.

Iz iskustva vjerujem, znate, da je jedno pravilno popločivanje ono koje se sastoji od sukladnih kvadrata (slika 5). Ako se sjetite pčelinjeg saća (slika 6), sjetili ste se i pravilnog popločivanja pravilnim šesterokutima. A ako njih pak razbijemo na po šest jednakostraničnih trokuta, dobijemo treće pravilno popločivanje (slika 7). Probamo li uzeti pravilne peterokute ili sedmerokute, lako ćemo uvidjeti da to nekako ne ide (slika 8). No kako možemo biti si-



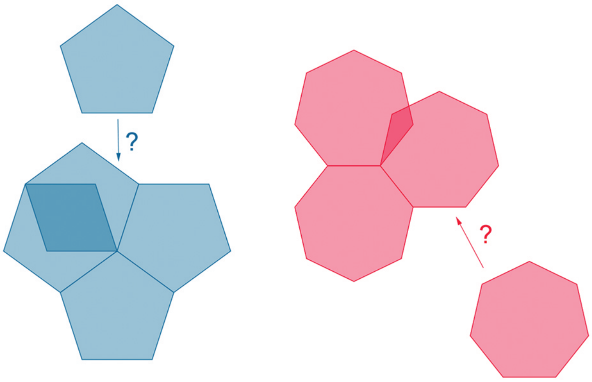
Slika 5. Pravilno popločivanje kvadratima (detalj sa zgrade u Lisabonu). Fotografija: ©FMB2015.

Slika 6. Pravilno popločivanje šesterokutima – pčelinje saće s izložbe "Volim matematiku". Fotografija: ©FMB2014.



Slika 7. Pravilno popločivanje trokutima u kojima je detalj s izložbe "Volim matematiku". Fotografija: ©FMB2014.

gurni, da nema drugih pravilnih popločivanja osim onih sa slika 5, 6 i 7? Tako da vjerujemo intuiciji, što nama matematičarima nekako nije dovoljno, ili pak da to dokažemo.



Slika 8. Pravilno popločivanje samo peterokutima ni samo sedmerokutima nije izvedivo. Slika izrađena programom *GeoGebra*.

Pitagorejci, filozofsko-vjersko-znanstvena zajednica koju je u 6. st. pr. Kr. osnovao znameniti Pitagora sa Samosa, znali su to dokazati. Smatra se da su to dokazali ovako:

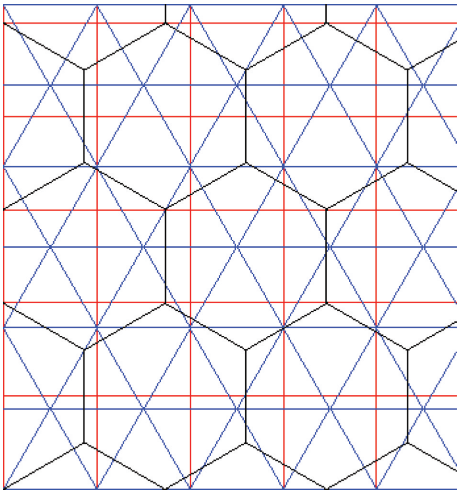
Uzmimo da se naše pravilno popločivanje sastoji od pravilnih n-terokuta. Kako su pitagorejci znali da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak dva prava kuta, znali su i da je zbroj kutova u n-terokutu $2n-4$ prava kuta, dakle je svaki unutrašnji kut pravilnog n-terokuta jednak $2-\frac{4}{n}$ pravih kutova.

Ako je popločivanje pravilno, onda se vrhovi sastaju s vrhovima. Zbog pravilnosti će se u svakom vrhu sastati isti broj n-terokuta, njih m, dakle je m puta unutrašnji kut pravilnog n-terokuta jednak punom kutu:

$$m \cdot \left(2-\frac{4}{n}\right) \cdot 90^\circ = 4 \cdot 90^\circ. \qquad (*)$$

Očito su m i n prirodni brojevi veći od 2. Za $m=3$, $n=6$ dobijemo popločivanje pravilnim šesterokutima, za $m=n=4$ popločivanje kvadratima i za $m=6$, $n=3$ popločivanje jednakostraničnim trokutima.

Ako je $m>6$ (iskoristili smo sve opcije do te), iz jednakosti slijedi $n<3$, što nema smisla, dakle nema drugih pravilnih popločivanja osim onih na slici 9.



Slika 9. Jedina tri pravilna popločivanja ravnine su s pravilnim trokutima, četverokutima i šesterokutima. Grafika izrađena LaTeX-paketom *TikZ*.

Prva dobitnica Fieldsove medalje

Velika je to čast. Bila bih sretna kad bi ova dodjela ohrabrila mlade znanstvenice i matematičarke. Sigurna sam da će u budućnosti biti puno više žena dobitnica ovakovog priznanja.

Ove riječi izgovorila je **Maryam Mirzakhani**, prva žena koja je dobitnica najprestižnije matematičke znanstvene nagrade - **Fieldsove medalje**.

Ovu nagradu mnogi uspoređuju s Nobelovom nagradom. Međunarodni matematički kongres dodjeljuje je svake četiri godine matematičaru mlađem od 40 godina (jednom ili više njih). Od promoviranja nagrade 1936. godine pa sve do 2014. Fieldsova medalja nije pripala niti jednoj ženi, a primilo ju je više od 50 muškaraca. Te 2014. godine, uz dvojicu kolega, medaljom je nagrađena Maryam Mirzakhani, matematičarka sa Sveučilišta Stanford u Sjedinjenim američkim državama. Nagradu je primila za "sofisticiran i značajan originalan doprinos u području geometrije i dinamičkih sustava." Zanimljivo je da je Maryam Mirzakhani svojem Sveučilištu, koje je među najboljima na svijetu, donijela nagradu nakon punih 48 godina, kada je jedan od dobitnika bio matematički velikan Paul Joseph Cohen.

Maryam Mirzakhani je rođena i odrasla u Teheranu. Kao školarka željela je postati pisac, a interes za matematiku izrazitije ju je zaokupio tek u srednjoj školi. U dva je navrata (1994. i 1995.) osvojila zlatne medalje na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi. Znanstvenu karijeru izgradila je u Sjedinjenim američkim državama.