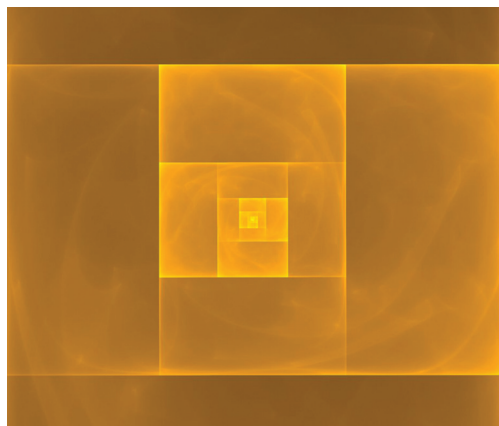


Super zlatni pravokutnik



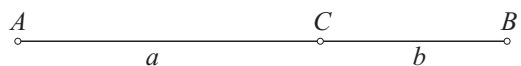
Jens Carstensen i Alija Muminagić,
Frederiksberg, Danska

U ovom ćemo članku dati definiciju **super zlatnog pravokutnika** i dokazati neka njegova svojstva. Prethodno ćemo se podsjetiti nekih definicija i poučaka (čitateljima sigurno poznatih) koje ćemo primjenjivati.

Definicija 1. Ako za dužinu $\overline{AB}$ na slici 1 vrijedi da je točkom C podijeljena tako da je

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, \quad (1)$$

kažemo da točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom rezu.



Slika 1.

Poučak 1. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u u zlatnom rezu ako je

$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Iz (1) slijedi

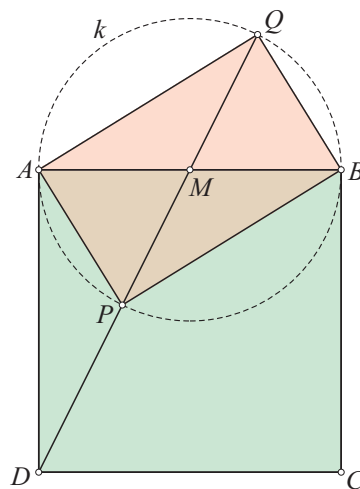
$$\begin{aligned} a^2 - ab - b^2 = 0 &\iff \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \\ &\iff \phi^2 - \phi - 1 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Čitateljima je zasigurno poznata konstrukcija koja zadanu dužinu dijeli u zlatnom rezu.

Definicija 2. Pravokutnik kod kojeg je odnos između duljina duže i kraće stranice jednak ϕ zove se zlatni pravokutnik.

Pogledajmo sada jednostavnu, ali manje poznatu konstrukciju zlatnog pravokutnika.

Neka je u kvadratu $ABCD$ točka M polovište dužine $\overline{AB}$. Kružnica k sa središtem u točki M i promjerom $\overline{AB}$ presijeca pravac MD u točkama P i Q . Dokazat ćemo da je četverokut $APBQ$ zlatni pravokutnik, tj. $\frac{|PB|}{|PA|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (vidi sliku 2).



Slika 2.

Jens Carstensen, Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $|MA| = |MB| = 1$. Lako vidimo da $|AD| = 2$, $|MD| = \sqrt{5}$ (prema Pitagorinu poučku u trokutu DMA). U tom je trokutu

$$\cos \sphericalangle AMP = \cos \sphericalangle AMD = \frac{|AM|}{|MD|} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

a kosinusni poučak u trokutu AMP daje

$$\begin{aligned} |PA|^2 &= \\ &= |PM|^2 + |AM|^2 - 2 \cdot |PM| \cdot |AM| \cdot \cos \sphericalangle AMP \\ &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Dalje vrijedi: trokut APB je pravokutan s pravim kutom u točki P (zašto?) pa Pitagorin poučak daje

$$|PB|^2 = |AB|^2 - |PA|^2 = 4 - 2 + \frac{2}{\sqrt{5}} = 2 + \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Tako je

$$\begin{aligned} \frac{|PB|^2}{|PA|^2} &= \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{5 - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{4} \iff \\ \frac{|PB|}{|PA|} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Zadatak za čitatelje: konstruirajte zlatni pravokutnik ako je poznato:

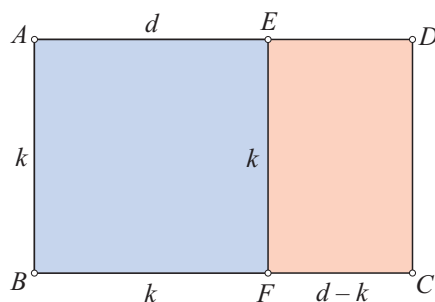
- kraća stranica
- duža stranica
- zbroj duljina duže i kraće stranice.

Dokažimo sada sljedeći poučak.

Poučak 2. Ako iz zlatnog pravokutnika uklonimo kvadrat s najvećom mogućom površinom, onda je preostali pravokutnik također zlatni.

Dokaz: Neka je $ABCD$ zlatni pravokutnik i neka je duža stranica $|AD| = d$ i kraća $|AB| = k$. Na slici 3 je $ABFE$ kvadrat s najvećom mogućom površinom, a dokazat ćemo da je $EFCD$ zlatni pravokutnik, tj.

$$\frac{k}{d-k} = \phi.$$



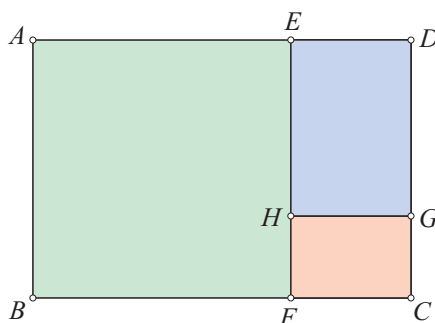
Slika 3.

Iz definicije zlatnog pravokutnika i (2) imamo

$$\frac{d}{k} - 1 = \phi - 1 = \frac{1}{\phi},$$

pa je $\frac{d-k}{k} = \frac{1}{\phi}$, tj. $\frac{k}{d-k} = \phi$ što je i trebalo dokazati. ■

Definicija 3. Pravokutnik $ABCD$ u kojem je $ABFE$ kvadrat, a preostali pravokutnik $DEFC$ podijeljen paralelom $\overline{GH}$ sa stranicom $\overline{BC}$ na dva pravokutnika, tako da su pravokutnici $ABCD$, $EDGH$ i $HFCG$ međusobno slični, zove se **super zlatni pravokutnik** (vidi sliku 4).



Slika 4.

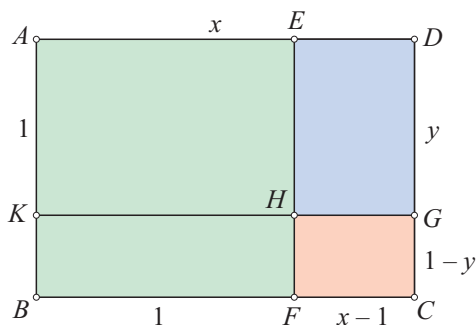
Poučak 3. Dva slična poligona imaju odgovarajuće kutove sukladne i odgovarajuće stranice proporcionalne (dokažite ili potražite dokaz u literaturi).

Poučak 4. U super zlatnom pravokutniku $ABCD$ u kojem je $|AB| = 1$, $|BC| = x$, $|DG| = y$ vrijedi da je:

$$x^3 - x^2 - 1 = 0. \quad (3)$$

Dokaz: Uvedimo oznake: $|AB| = 1$, $|BC| = x$, $|DG| = y$. Tada je $|FC| = x - 1$, $|GC| = 1 - y$ (slika 5). Iz $ABCD \sim HF CG$ (prema poučku 3) slijedi

$$\frac{x}{1} = \frac{x-1}{1-y} \iff x - xy = x - 1 \iff xy = 1. \quad (4)$$



Slika 5.

Produljimo sada stranicu $\overline{GH}$ preko točke H i presječnu točku tog produžetka i stranice $\overline{AB}$ označimo sa K . Sada imamo da je $P(BFHK) = |BF| \cdot |HF| = 1 \cdot (1 - y)$ i $P(EDGH) = |HG| \cdot |DG| = (x - 1) \cdot y$.

Iz $xy = 1$ slijedi da je $1 \cdot (1 - y) = (x - 1)y$, pa je $P(BFHK) = P(EDGH)$.

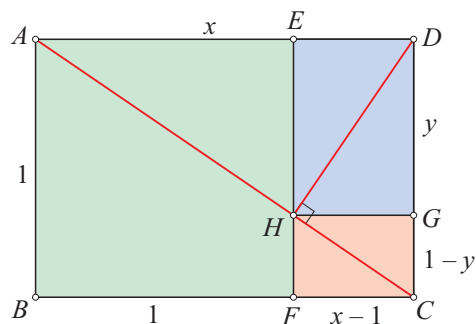
Sada iz $ABCD \sim EDGH$ proizlazi

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{x-1} \iff x^2 - x = y \stackrel{(4)}{\iff} x(x^2 - x) = 1 \iff x^3 - x^2 - 1 = 0. \quad (5)$$

Jednadžba (5) ima rješenje $x \approx 1.46557 \dots$, pa je $y = \frac{1}{x} \approx 0.68233 \dots$

Poučak 5. U super zlatnom pravokutniku (vidi sliku 6) vrijedi:

1. dijagonala $\overline{AC}$ prolazi kroz točku H
2. $\overline{DH} \perp \overline{AC}$
3. $|GC| = y^3 (= |DG|^3)$
4. $|AC| = x\sqrt{x}$, $|HC| = y\sqrt{y}$ i $|AH| = \sqrt{x}$.



Slika 6.

Dokaz:

1. Iz sličnosti pravokutnika $ABCD$ i $HF CG$ slijedi da je $\frac{1}{x} = \frac{1-y}{x-1}$, a to je jednako $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|HF|}{|FC|}$. Dakle, pravokutni trokuti ABC i HFC imaju proporcionalne stranice priležeće pravom kutu pa su prema poučku o sličnosti trokuta S-K-S ta dva trokuta slični. Dakle, i kutovi $\angle BCA$ i $\angle FCH$ su sukladni, a kako imaju zajednički jedan krak i leže u istoj poluravnini, slijedi da im je i drugi krak zajednički. Specijalno, znači da je točka H na dužini $\overline{AC}$. ■

2. Dovoljno je dokazati da je $|HG|^2 = |DG| \cdot |GC|$ (Objasni!). Imamo: $|HG|^2 = |DG| \cdot |GC| \iff (x-1)^2 = y(1-y) \iff$ (zbog $x^2 - x = y$)
 $\iff (x-1)^2 = (x^2 - x)(1 - (x^2 - x))$
 $\iff (x-1)^2 = x(x-1)(1 - x^2 + x)$
 $\iff x-1 = x(1 - x^2 + x)$
 $\iff x-1 = x - x^3 + x^2$
 $\iff x^3 - x^2 - 1 = 0$

što je točno prema (5). ■

3. Iz $xy = 1$ je $x = \frac{1}{y}$, $y = \frac{1}{x}$, pa iz $y = x^2 - x$ dobivamo $y = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} \iff y^3 = 1 - y \iff \frac{1}{x^3} = 1 - \frac{1}{x} \iff x^3 - x^2 - 1 = 0$, što je točno. Dakle, $y^3 = 1 - y$ ili $|DG|^3 = |GC|$. ■

4. Iz $x^3 - x^2 - 1 = 0$ slijedi $x^3 = x^2 + 1$. Primjenom Pitagorina poučka u trokutu ABC dobivamo: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 1 + x^2 \iff$ (zbog $x^3 = x^2 + 1$) $|AC|^2 = x^3 \iff |AC| = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$, a u trokutu HGC imamo: $|HC|^2 = (x-1)^2 + (1-y)^2$. Pokazat ćemo da je $(x-1)^2 + (1-y)^2 = y^3 (= |HC|^2)$. Zbog $y^3 = 1 - y$ (vidi gore) imamo:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (1-y)^2 &= 1-y \\ \iff (x-1)^2 &= 1-y - (1-y)^2 \\ \iff (x-1)^2 &= 1-y - 1 + 2y - y^2 \\ \iff (x-1)^2 &= y(1-y) \\ \iff \frac{x-1}{1-y} &= \frac{y}{x-1}, \end{aligned}$$

što je točno (jer je $HFCG \sim DEHG$). Dakle, $|HC|^2 = y^3$, tj. $|HC| = y\sqrt{y}$. ■

Pokazat ćemo još da je $\sqrt{x} = x\sqrt{x} - y\sqrt{y}$.

Sa slike 6 vidimo da je $|AC| - |HC| = |AH|$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} &= \sqrt{x} \iff \sqrt{x}(x-1) = y\sqrt{y} \\ \iff x(x-1)^2 &= y^3 \iff (\text{zbog } y^3 = 1-y) \\ \iff x(x-1)^2 &= (1-y) \\ \iff xy(x-1)^2 &= y(1-y) \iff (\text{zbog } xy = 1) \\ \iff (x-1)^2 &= y(1-y) \iff \frac{x-1}{1-y} = \frac{y}{x-1}, \end{aligned}$$

što je točno i slijedi tvrdnja.

LITERATURA

- 1/ T. Crilly (1994.): *A supergolden rectangle*, The Mathematical gazette, str. 320.
- 2/ J. Carstensen, A. Muminagić (2015.): *Et supergyldnet rektangel*, Matematik Magasinet, str. 3270.
- 3/ *Crux Mathematicorum* (2004.), str. 63.
- 4/ D. Palman (1998.): *Planimetrija*, Element, Zagreb.
- 5/ Pavković-Veljan (1992.): *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb.

ELEMENT

ELEMATIKA

Dobrodošli na Elementove radionice!

Kako biste se i praktično upoznali s nastavničkim portalom **Elementika** i saznali kako upotrebljavati sve njegove mogućnosti, za vas smo organizirali zanimljiva predavanja i stručne radionice pod nazivom **Elementika – digitalno podržana nastava matematike**. Matematičko društvo Zadar i Element pozivaju vas na prvu sljedeću radionicu koja će se održati

u subotu, 6. svibnja 2017. godine u Zadru.

Na internetskoj stranici <https://radionice.element.hr/> o radionici možete saznati više te prijaviti sebe i svoje kolege popunjavanjem online prijavnice.



Slične radionice održale su se već nekoliko puta: u Splitu, Osijeku, Virovitici i Zagrebu. Zahvaljujemo svim kolegama koji su nas posjetili. Vjerujemo da će s vremenom **Elementika** postati nezaobilazano mjesto za kvalitetniju pripremu nastave i da će mnoge od vas potaknuti na sudjelovanje u kreiranju novih sadržaja. Vrijednost ovog portala tako će neprestano rasti, zahvaljujući vama samima.

Sandra Gračan, Element d.o.o., Zagreb