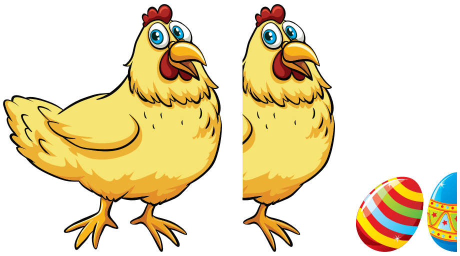
Zašto je ta proporcionalnost tako teška?

Ljerka Jukić Matić i
Andrea Gudelj, Osijek

Sjećate li se zadatka:
Ako kokoš i pol za dan
i pol snese jaje i pol,
koliko jaja snese 6 kokoši
za 4 dana?



Ovaj nas zadatak vraća na proporcionalnost i proporcionalne veličine, koje se po trenutačno važećem planu i progamu rade u 7. razredu osnovne škole. Proporcionalnost i proporcionalne veličine možemo smjestiti unutar zaključivanja koje se naziva proporcionalno zaključivanje. Teško je jednom rečenicom opisati što čini ili što jest proporcionalno zaključivanje. Ono što sa sigurnošću možemo reći jest da proporcionalno zaključivanje počinje razumijevanjem multiplikativnih odnosa te razlikovanjem multiplikativnih i aditivnih odnosa. Tako omjeri i razmjeri podrazumijevaju multiplikativnu usporedbu umjesto aditivne pa rješavanje problema vezanih uz omjere i razmjere potiče razvoj proporcionalnog zaključivanja. Dakle, sposobnost uspoređivanja multiplikativnih odnosa između veličina pripada proporcionalnom zaključivanju.

Kada smo (ne baš ukratko) opisali što bi to moglo biti proporcionalno zaključivanje, pogledajmo sljedeći zadatak:

Primjer 1. *Ako jedan pas poveća masu sa* 5 *kg na* 8 *kg, a drugi sa* 3 *kg na* 6 *kg, koji se pas više udebljao?*

Na ovo pitanje možemo dati dva točna odgovora: Ako razmišljamo o apsolutnom odnosu ili aditivno, možemo odgovoriti da su se oba psa jednako udebljala tj. 3 kg. No, ako razmišljamo o relativnom odnosu ili multiplikativno, možemo zaključiti da se drugi pas više udebljao jer se njegova masa udvostručila. Prema multiplikativnom zaključivanju prvi bi pas trebao imati 10 kg za jednak relativan odnos.

Jednom prilikom ovaj zadatak dali smo skupini srednjoškolskih nastavnica matematike koje su predložile da se promijeni formulacija tako da novo pitanje u svojoj srži sadrži ili izraz “za koliko” ili “koliko puta”. No pitanje u ovakvom obliku pokazuje odnos među veličinama koji može biti i aditivan i multiplikativan. Ako tražimo odgovor na pitanje koliko puta ili za koliko tada je odnos među veličinama fiksiran: ili mulitplikativan ili aditivan.

doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić, Odjel za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, `ljerkaj@gmail.com`
Andrea Gudelj, magistra edukacije matematike i informatike, Osnovna škola Ivan Meštrovic u Vrpolju, `andreagudelj6@gmail.com`

Multiplikativne i aditivne veze

Identificiranje multiplikativnih odnosa neizostavan je korak u razvoju proporcionalnog zaključivanja, a pridonosi i razumijevanju pojma omjera. Zadatke u nastavku dali smo skupini budućih nastavnika matematike na završnoj godini studija kao dio istraživanja za diplomski rad. Neki zadatci su u sebi sadržavali veličine između kojih možemo naći i aditivne i multiplikativne veze:

Zadatak 1. *Prije dva tjedna izmjerena su dva cvijeta – jedan visok* 8 *cm, a drugi* 12 *cm. Danas je prvi visok* 11 *cm, a drugi* 15 *cm. Koji je cvijet više narastao?*

Ovaj se zadatak mogao riješiti i aditivnim i multiplikativnim zaključivanjem, stoga su dva odgovora točna – prvi cvijet je više narastao i oba su cvijeta jednako narasla.

Zadatak 2. *Gospođa Alenka napravila je fotografiju svjetionika Mrkog zeca dimenzije* 10 *cm sa* 15 *cm te ju uvećala na fotokopirnom uređaju koristeći se uvećanjem od* 200 *%. Koji je oblik sličniji kvadratnom, originalne fotografije ili uvećane kopije?*

a) *Originalna fotografija je više kvadratnog oblika.*
b) *Uvećana kopija je više kvadratnog oblika.*
c) *Originalna fotografija i uvećana kopija su jednakog oblika.*
d) *Ne raspolažemo s dovoljno informacija da bismo mogli zaključiti što je od ponuđenog više kvadratnog oblika.*

Jedino smo multiplikativnim zaključivanjem mogli doći do rješenja ovoga zadatka. Točan odgovor je c).

Zadatak 3. *Klub zelenih znanstvenika ima na raspolaganju četiri pravokutne gredice na kojima vrše pokuse s biljkama. Dimenzije gredica su redom:*

a) 30 *cm sa* 120 *cm*
b) 210 *cm sa* 300 *cm*
c) 510 *cm sa* 600 *cm*
d) 810 *cm sa* 900 *cm.*

Koja od gredica ima oblik najsličniji kvadratu?

U ovom zadatku trebalo je provjeriti omjere duljine i širine svake gredice, a omjer koji je bliži jedinici pokazuje koja je gredica oblika najsličnijeg kvadratu.

Zadatak 4. *Tena i Iva trče po atletskoj stazi jednakom brzinom. Tena je krenula prva. Kad je ona otrčala* 9 *krugova, Iva je otrčala* 3 *kruga. Kada je Iva završila* 15*. krug, koliko je krugova otrčala Tena?*

a) 45 *krugova*
b) 24 *kruga*
c) 21 *krug*
d) 6 *krugova.*

Kod ovog zadatka su se pojavile male poteškoće, jer je većina studenata zanemarila uvjet da se Tena i Iva kreću jednakom brzinom, što ih je dovelo do pogrešnog rješenja. Zbog toga su se koristili formulom proporcije i tako došli do netočnog odgovora. Točan odgovor je c).

Zadatak 5. *Usred košarkaške sezone običaj je proglasiti najboljeg izvođača slobodnih bacanja na utakmicama. Dana je statistika četvorice igrača:*

a) *Novak:* 8 *od* 11 *bacanja*
b) *Williams:* 15 *od* 19 *bacanja*
c) *Peterson:* 22 *od* 29 *bacanja*
d) *Reynolds:* 33 *od* 41 *bacanja.*

Koji je igrač najbolji izvođač slobodnih bacanja?

Ovaj se zadatak opet može riješiti i aditivnim i multiplikativnim zaključivanjem. Možemo gledati razliku između broja postignutih bacanja i ukupnog broja bacanja ili njihove omjere.

Zadatak 6. *Poljoprivrednik ima* 3 *polja. Jedno je* $185\ m \times 245\ m$*, drugo je* $75\ m \times 114\ m$*, a treće* $455\ m \times 508\ m$*. Ako biste letjeli iznad tih polja, koje bi imalo oblik najsličniji kvadratu? A koje bi imalo oblik najmanje sličan kvadratu? Objasni svoj odgovor.*

Slično kao kod 3. zadatka, provjeravanjem omjera duljina stranica svakog od navedenog zemljišta dolazimo do točnog odgovora.

Sada pogledajmo statistiku studentskih rezultata:

Zad.	Točno (%)	Netočno (%)	Aditivno zaključivanje (%)	Multiplikativno zaključivanje (%)
1.	$26/42$ (62 %)	$16/42$ (38 %)	$19/26$ (73 %)	$7/26$ (27 %)
2.	$29/42$ (69 %)	$13/42$ (31 %)		
3.	$39/42$ (93 %)	$3/42$ (7 %)		
4.	$10/42$ (4 %)	$32/42$ (76 %)		
5.	$40/42$ (95 %)	$2/42$ (5 %)	$6/40$ (15 %)	$34/40$ (85 %)
6.	$30/42$ (71 %)	$12/42$ (29 %)		

Što nam govore rezultati ovog malog istraživanja? Neki studenti nisu točno odgovorili na postavljenja pitanja. S druge strane, iako nije pogrešno, neki su se oslanjali na aditivno zaključivanje u zadatcima gdje je bilo moguće i aditivno i multiplikativno zaključivanje. Traženje aditivnih veza karakteristično je za učenike nižih uzrasta i osobe sa slabo razvijenim proporcionalnim zaključivanjem [3]. Stoga možemo reći da ni svi budući nastavnici matematike nemaju dobro razvijeno proporcionalno zaključivanje s obzirom na to da je uočavnje multiplikativnih odnosa i veza ključno za takvu vrstu mišljenja. Zanimljivo je da naši rezultati ne odstupaju od rezultata koje pokazuju i studije provedene u drugim zemljama [2]. Recimo još samo da je 30 % studenata riješilo točno sve zadatke.

Osobine proporcionalnih mislioca

Proporcionalno zaključivanje ima puno dublji smisao od postavljanja i rješavanja razmjera. Osobe koje imaju razvijeno proporcionalno zaključivanje imaju sljedeće karakteristike:

- Posjeduju osjećaj za kovarijaciju. Drugim riječima, oni razumiju odnose u kojima dvije količine istovremeno variraju te su u mogućnosti vidjeti kako se varijacije u jednoj veličini podudaraju s varijacijama u drugoj za jednaki koeficijent.
- Prepoznaju i razlikuju proporcionalne i neproporcionalne veličine u svakodnevnom životu.
- Pronalaze brojne strategije za postavljanje razmjera ili uspoređivanje omjera, te se većina tih varijacija temelji na neformalnim strategijama, a ne na predloženim algoritmima.
- Prepoznaju omjere kad su zapisani u različitim oblicima (3 prema 2, $\frac{3}{2}$, $3:2$).

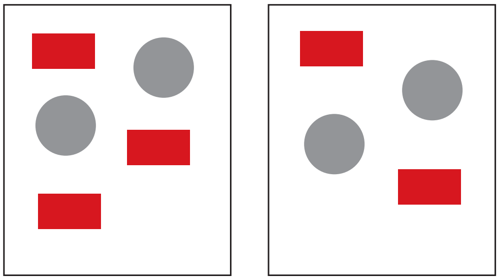
Navike i vještine proporcionalnog zaključivanja ne stječu se ako se ne potiče njihov razvoj. Zanimljivo je da na razvoj proporcionalnog zaključivanja kod učenika negativno utječe direktno korištenje formula u rješavanju zadataka. Naime, na taj način učenici ne razmišljaju o razlozima zašto rabe te formule, a s druge strane ni ne pokušavaju sami pronaći drukčiji način rješavanja zadataka. Proporcionalno zaključivanje razvija se kroz različite aktivnosti koje uključuju uspoređivanje i određivanje jednakosti omjera i rješavanje razmjera kroz različite problemske zadatke bez pomoći formula. Iznimno je važno savladati pojam omjera kako bismo razumjeli odnose među proporcionalnim i obrnuto proporcionalnim veličinama. Prisjetimo se da su dvije veličine proporcionalne ako je omjer njihovih vrijednosti konstantan, a obrnuto proporcionalne ako je umnožak njihovih vrijednosti konstantan.

Pogledajmo neke aktivnosti koje su izrazito korisne za razvoj proporcionalnog zaključivanja:

Primjer 2. Identificiranje svih veza u danoj situaciji
Osnovna škola Retfala ima 16 *učenika šestog razreda, te* 12 *od njih tvrdi da su ljubitelji košarke. Ostali učenici nisu ljubitelji košarke. Opišite odnose između učenika koji su ljubitelji košarke i onih koji nisu!*

Ideja ove aktivnosti je da učenici uoče kakve sve veze postoje među veličinama. Kada se utvrdi da ima 4 učenika koji ne vole košarku, postoji nekoliko mogućnosti: 8 je ljubitelja više nego neljubitelja; 3 puta je više ljubitelja nego neljubitelja; na jednog učenika koji ne voli košarku dolaze 3 učenika koji vole košarku. Prvi odnos je aditivan, dok su drugi i treći multiplikativni.

Primjer 3. Identificiranje multiplikativne situacije
Na kojoj slici ima više krugova?

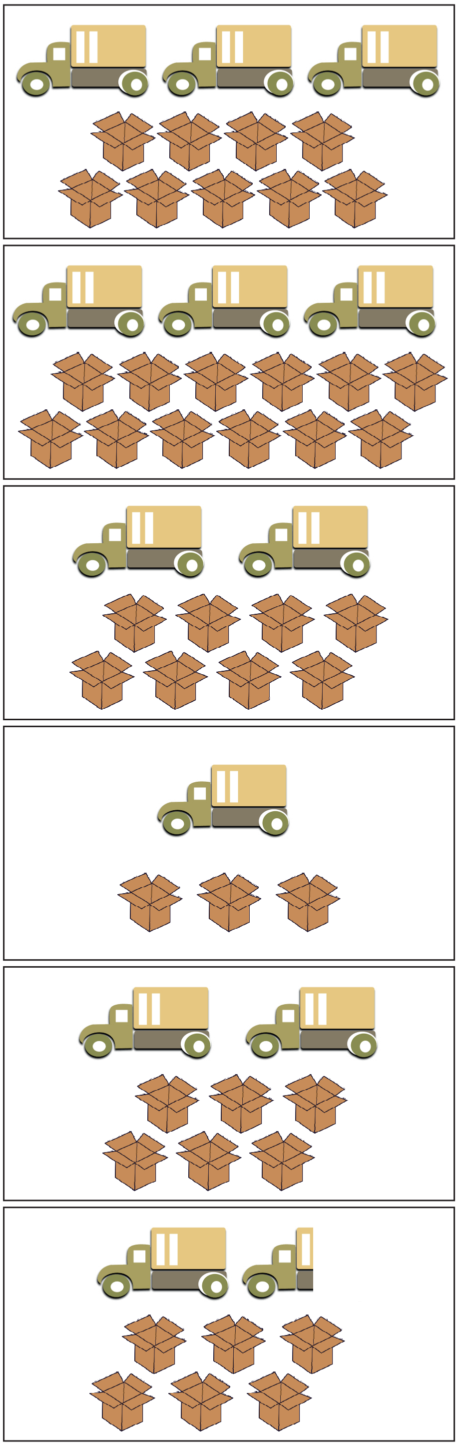


Slika 1.

U ovoj aktivnosti slikovna situacija pokazuje multiplikativne i aditivne odnose. Ako izbrojimo koliko krugova ima na svakoj slici, dolazimo do aditivne veze i zaključujemo da krugova ima jednako. No ako koristimo multiplikativno zaključivanje, tj. ako uspoređujemo koliko krugova ima u odnosu na ukupan broj likova na slici, točan odgovor je na drugoj slici. Zapravo je dvosmislenost ključna u ovoj aktivnosti. Ona nas potiče da na situaciju počnemo gledati i na drugi način. Ako učenici sami ne predlože drugi način zaljučivanja, možemo ih sami potaknuti.

Primjer 4. Isti objekti, različiti omjeri
Na slici 2 dane su kartice na kojima su prikazani kamioni i kutije. Grupirajte one kartice na kojima se nalaze jednaki omjeri kutija i kamiona.

Učenik najprije izvlači jednu karticu, a zatim treba odabrati sve one kartice koje prikazuju isti omjer dviju veličina (kamiona i kutija) kao na izvučenoj kartici. Ova aktivnost naglašava numeričku stranu omjera. Najviše smisla ima gledati koliko kutija ide na jedan kamion. Usporedbe su jednostavne kada se nađe jedinična veličina. Uočite da se na zadnjoj sličici nalazi pola kamiona.



Slika 2.

Primjer 5. Prikazivanje omjera u tablici
Napravimo voćni koktel koristeći se čašama vode i soka. U tablici se nalaze recepti sa različitim količinama potrebnim za voćni koktel:

Broj čaša soka	3	6	9
Broj čaša vode	2	4	6
Ukupan broj čaša koktela	5	10	15

a) *Koliki je omjer broja čaša soka i vode u receptu koji daje ukupno* 5 *čaša koktela?*
b) *Koliki je omjer broja čaša soka i vode u receptu koji daje ukupno* 10 *čaša koktela, odnosno* 15 *čaša koktela?*
c) *Možete li uočiti neki uzorak? Ako je odgovor potvrdan, objasnite kakav uzorak uočavate.*
d) *Ako imate* 12 *čaša soka, koliko čaša vode nam je potrebno da se dobije koktel koji će imati isti okus kao u prethodnim receptima?*

Tablice omjera dobar su način za organizaciju podataka i prikazivanje kako su vrijednosti dviju veličina povezane. Ovo je također način za izgradnju neformalne strategije zaključivanja. U neformalne strategije zaključivanja ubrajaju se svođenje na jediničnu veličinu i korištenje tablice za lakši prikaz odnosa veličina.

Primjer 6. *Napravite tablicu kako biste odgovorili na pitanje: Ako cijena kilograma sira iznosi* 42.50 *kn, koliko iznosi cijena* 12.13 *kg sira?*

Ovaj zadatak možemo organizirati i prikazati na sljedeći način:

Korak	Masa u kg	Cijena	Komentar
A	1	42.50	zadano
B	10	425.0	$A \cdot 10$
C	2	85	$A \cdot 2$
D	0.1	4.25	$A : 10$
E	12.1	514.25	$B + C + D$
F	0.001	0.425	$D : 100$
G	0.003	1.275	$F \cdot 3$
H	2.13	515.525	$E + G$

U tablici možemo vidjeti korake za računanje specifičnih vrijednosti: za 10 kg, za 0.1 kg i 0.001 kg. Upravo ovakvo korištenje neformalnih metoda pomaže razviti svijest o onome što činimo, i kako veličine reagiraju kad promijenimo iznos jedne od njih.

Istraživačke aktivnosti

Istraživanja pokazuju da učenici najbolje uče kad im se predoči neka autentična situacija, tj. situacija koja je bliska njihovom svakodnevnom životu ili situacija koju mogu zamisliti. Tako se istraživačke aktivnosti mogu iskoristiti i za razvoj proporcionalnog zaključivanja. U nastavku su navedene neke istraživačke aktivnosti. Prva aktivnost namijenjena je učenju i razumijevanju pojma omjera, u drugoj aktivnosti omjer služi za uočavanje veze među veličinama tj. aktivnost je pogodna za učenje o proporcionalnim veličinama dok je treća aktivnost pogodna za učenje o obrnuto proporcionalnim veličinama.

Aktivnost: Tko je u pravu?

U ovoj aktivnosti nastoji se utvrditi koji automobil troši najmanje benzina po prijeđenom kilometru. Aktivnost se koristi pojmom omjera.

Zadatak 7. *Ana i Barbara su učiteljice. Upoznale su se na učiteljskom skupu. Obje su nedavno kupile novi automobil i počele su uspoređivati karakteristike automobila. Obje su rekle da je njihov automobil ekonomičan u potrošnji goriva. Ana kaže da je vozila* 100 *km do raskrižja i onda* 190 *km do grada gdje se održava skup i potrošila samo* 19 *litara benzina. Barbara kaže da je vozila* 36 *km i onda poput Ane,* 190 *km do skupa. Njezin je automobil potrošio samo* 15.5 *litara benzina. Barbara tvrdi da je njezin automobil ekonomičniji, ali Ana se ne slaže. Tko je u pravu? Objasni svoj odgovor.*

Cilj je pronaći kriterij kako bismo odlučili koja je učiteljica u pravu. Matematički, problem uključuje uspoređivanje razlomaka. Postoje dva načina rješavanja problema: uspoređujući udaljenosti koje se mogu prijeći za svaku litru benzina (km/l) ili uspoređujući koliko benzina je potrebno za određenu udaljenost (l/km).

1. Uspoređujući km/l:

   Anin automobil: $\dfrac{290\text{ km}}{19\text{ l}} = 15.26$ km/l

   Barbarin automobil: $\dfrac{226\text{ km}}{15.5\text{ l}} = 14.58$ km/l

   Anin automobil prijeđe veću udaljenost za jednu litru benzina.
2. Uspoređujući l/km:

   Anin automobil:

   $$\frac{19\text{ l}}{290\text{ km}} = 0.0655 \text{ litara po kilometru}$$

   Barbarin automobil:

   $$\frac{15.5\text{ l}}{226\text{ km}} = 0.0685 \text{ litara po kilometru.}$$

   Ovi nam podatci govore o ekonomičnosti automobila. Što je broj koji pokazuje potrošnju goriva manji, to zapravo znači da je taj automobil ekonomičniji. U ovom slučaju, Anin automobil koristi manje benzina po kilometru i on je i dalje ekonomičniji.

Oba načina računanja dovode do jednakog odgovora koji kaže da je Anin automobil ekonomičniji. U stvarnosti, ekonomičnost automobila je uobičajeno određivati po prijeđenim kilometrima po litri, a ne obrnuto. U razredu možemo održati i raspravu zašto se usporedbe trebaju napraviti za 100, 200 ili 300 km, a ne na primjer za 10, 20 ili 30 km? Ako putujemo samo 10, 20 ili 30 km, razlike nisu precizno vidljive, jer brzinomjer automobila nije dovoljno osjetljiv i potrošnja goriva će biti praktički jednaka u svim slučajevima.

Također, učenike možemo pitati i kako uvjeti na cesti mogu utjecati na odgovore? Zbog toga što uvjeti na cesti (nagibi, udubljenja, gužva u prometu itd.) utječu na brzinu i potrošnju goriva, prilikom usporedbe efikasnosti automobila moramo ih uzeti u obzir te očekivati različite rezultate u različitim uvjetima. Na primjer, prelaženje određene udaljenosti u gradu dat će drukčije rezultate nego prelaženje iste udaljenosti izvan grada. Ili, dva automobila potroše istu količinu goriva da bi prešli neku udaljenost, ali kada jedan vozi uzbrdo, a drugi po ravnoj cesti, nisu jednako učinkoviti. Učenici mogu prikupljati podatke koji se odnose na automobil njihovih roditelja, unijeti ih u tablicu i usporediti.

Zadatak 7. (Nastavak). *Nakon prethodne rasprave, Ana i Barbara nisu mogle odlučiti tko je u pravu pa su napravile još testova. Kako bi usporedile potrošnju goriva njihovih automobila, provjerile su potrošnju pod drugim okolnostima.*

Otkrile su sljedeće:

a) *Anin automobil prijeđe 373 km i potroši 24 litre goriva.*

b) *Barbarinom automobilu su potrebne 32 litre goriva da prijeđe 464 km.*

Zadatci:

1) *Prema novim podatcima, koji je automobil ekonomičniji u potrošnji goriva?*
2) *Pod pretpostavkom da su uvjeti na cesti jednaki za oba automobila, pronađi broj kilometara koje svaki automobil može prijeći s jednom litrom benzina.*
3) *Koristeći rezultate iz $2)$ popuni tablicu ispod zadataka.*
4) *Za svaki automobil izvedi generalno "pravilo" (matematički izraz) koji povezuje broj litara (N) i kilometara (K).*
5) *Nacrtaj graf koji prikazuje "pravilo" za svaki automobil. Što nagib na svakom grafu označava?*
6) *Koristeći se "pravilom", pronađi broj kilometara koje svaki automobil prijeđe trošeći 9.5 litara, 23.8 litara, 100 litara, 125 litara i 150 litara benzina.*

Broj litara benzina	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Udaljenost koju Ana može prijeći									
Udaljenost koju Barbara može prijeći									

Ova se aktivnost nastavlja na gornju aktivnost i uvodi različite načine prikazivanja podataka, koristeći se matematičkim izrazima, grafovima ili tablicama. Naprimjer, graf može prikazivati potrošnju goriva kao omjer između broja kilometara i broja litara goriva. Preko ove aktivnosti možemo uvesti i linearnu funkciju. Za Anin automobil ($\frac{373}{24} = 15.5$ km/l) linearna funkcija je $K = 15.5 \cdot N$ (N = litre goriva, K = prijeđeni kilometri), a općenito $K = aN$.

Aktivnost: Što je u hrđi?

U stvarnom životu možemo vidjeti da metal puca bez djelovanja neke fizikalne sile na njega. Često je krivac hrđa. U ovoj aktivnosti istražuje se komponenta u hrđi koja uzrokuje propadanje metala; ubrzo postaje jasno da korištenje omjera može pomoći u proizvodnji metala. Aktivnost čak vodi do otkrića metode za pronalaženje količine željeza i kisika u bilo kojoj količini hrđe.

Zadatak 8. Kemičarka provjerava komponente hrđe i doznaje da je sastavljena od željeza i kisika. Istraživanja napravljena za različite mase uzoraka dala su sljedeće rezultate.

Masa uzorka hrđe (grami)	Masa željeza u uzorku (grami)	Masa kisika u uzorku (grami)
50	35	15
100	70	30
135	94.5	40.5
150	105	45

Zadatci. Ako kemičarka analizira uzorak od 400 grama, koliko grama željeza i kisika treba očekivati? Detaljno obrazloži svoj odgovor.

1) Je li omjer između mase željeza i kisika konstantan? Ako je, koliko iznosi? Objasni svoj odgovor.
2) Na koji se način omjer može iskoristiti kako bi se pronašla količina željeza i kisika u 500 grama hrđe? U 1 kilogramu? Detaljno obrazloži svoj odgovor.
3) Predloži općenitu metodu za pronalazak količine željeza i kisika u bilo kojem uzorku hrđe.

Kolika je masa meteorita?

Ova aktivnost prikazuje situaciju u kojoj je proporcionalni odnos obrnut (indirektan). Obrnuta proporcija između dviju pozitivnih veličina pojavljuje se kada je njihov produkt konstantan. Drugim riječima, ako se jedna veličina mijenja u jednom smjeru (npr. povećava), onda se druga mora mijenjati u suprotnom smjeru (npr. smanjiti). Kako bismo zaokružili učenje o pojmu proporcije i nadogradili proporcionalno zaključivanje, nužno je pozabaviti se i problemima obrnute propocije.

Ova aktivnost potiče učenike da se najprije koriste vlastitim neformalnim metodama da riješe zadatak, a kasnije da tu strategiju formaliziraju. Ova aktivnost može se upotrijebiti kao uvod u temu obrnute proporcije, ili kao završna aktivnost kojom bi se ta tema zatvorila.

Zadatak 9. *Znanstvenici na jednom sveučilištu dobili su mali meteorit donesen s Mjeseca. Odlučivši ga izvagati u laboratoriju, razočarali su se jer tamo nemaju vagu za vaganje malih objekata. U želji da izvažu svoj meteorit, potražili su drugi način. U laboratoriju su otkrili vagu nejednakih krakova (tj. duljine krakova $a \neq b$). Nakon rasprave, smislili su jednostavan način kako otkriti masu meteorita (M). Učinili su sljedeće: stavili su meteorit u jednu od posuda i otkrili kako vaga može biti u ravnoteži s utegom od 10 grama u drugoj posudi. Onda su stavili meteorit u drugu posudu i otkrili da vaga može biti u ravnoteži s utegom od 40 grama u prvoj posudi. Nakon izračunavanja, došli su do mase meteorita.*

Zadatci.

1) *Objasnite kako su znanstvenici dobili masu meteorita M i kolika je njegova masa.*
2) *Zapišite obrazloženje kako ste došli do rješenja.*

Jedan od problema na koji možemo naići u ovoj aktivnosti je vaga s krakovima. Primjerak vage s jednakim krakovima možete posuditi od nastavnika kemije ili fizike ili pokazati učenicima sliku takve vage. A zatim prijeći na vagu s nejednakim krakovima. Masu meteorita možemo dobiti usporedbom podataka koji su dobiveni za svako mjerenje. Ova usporedba je izuzetno korisna, jer su duljina krakova i masa objekta u posudi obrnuto proporcionalni. Ravnoteža se postiže kada je umnožak tih veličina jednak. Ako nam x predstavlja masu meteorita, a a i b duljine krakova vage, tada dobivamo iduće:

Prvo vaganje: $a \cdot x = b \cdot 10$ tj. $\frac{a}{b} = \frac{10}{x}$.

Drugo vaganje: $a \cdot 40 = b \cdot x$ tj. $\frac{a}{b} = \frac{x}{40}$.

Iz ovoga slijedi $\frac{a}{b} = \frac{10}{x} = \frac{x}{40}$ tj. $x^2 = 400$ pa je

$x = 20$. Problem rješavanja kvadratne jednadžbe u 7. razredu možemo preoblikovati u pitanje: Koji broj pomnožen sa samim sobom daje 400?

Važnost proporcionalnog zaključivanja

Sposobnost proporcionalnog načina razmišljanja i zaključivanja je važan faktor u razvoju sposobnosti razumijevanja i primjene matematike. Osim u matematici, proporcionalno zaključivanje je prisutno i u drugim područjima kao što su prirodne znanosti, glazba, geografija, itd. No proporcionalno zaključivanje rabimo i u svakodnevnom životu kod prilagođavanja recepata ili doza lijeka, izrade različitih smjesa, mjerenja, rada s crtežima i zemljopisnim kartama, računanja najpovoljnije kupovine, poreza i investicija itd.

Čak i u književnosti nailazimo na usporedbe i ideje proporcionalnosti iako ih njihovi autori nisu pisali s ciljem istraživanja proporcionalnosti. U bajkama možemo čitati o divovima i minijaturnim bićima čije su visine proporcionalne visini ljudi. Takav su primjer Guliverova putovanja. Guliver je na svojim putovanjima posjetio Liliput, gdje je sve 12 puta manje i zemlju divova Brobdingnag, gdje je sve 12 puta veće. Dakle, ako je standardna mjera čaše soka 2 decilitra, kolika bi standardna mjera bila u Liliputu, a kolika u Brobdingnagu?

Možemo zaključiti kako je iznimno važno poticati proporcionalno zaključivanje u nastavi matematike na različite načine:

- Učenicima predočiti zadatke s omjerima i razmjerima u brojnim i različitim kontekstima.
- Zadati učenicima probleme koji su i kvalitativne i kvantitativne prirode. Kvalitativni problemi (npr. Koja je posuda sa slike punija?) potiču učenike na proporcionalno zaključivanje, a da pritom ne manipuliraju brojevima.
- Pomagati učenicima u razlikovanju proporcionalnih i neproporcionalnih situacija.
- Poticati rasprave i eksperimentiranje s ciljem predviđanja i uspoređivanja omjera.
- Pomagati učenicima u povezivanju proporcionalnog zaključivanja s ranije naučenim.
- Uočiti da algoritamski postupci za rješavanje proporcija ne razvijaju proporcionalno zaključivanje i da učenici trebaju biti fleksibilni u razmišljanju i otkrivati različite načine rješavanja zadataka.

Sad možemo odgovoriti i na pitanje s početka teksta. Upotrijebili smo neformalnu metodu prikazivanja veličina u tablici jer nam se to činilo kao najsmisleniji način kako da odgovorimo na pitanje. Upravo prikazivanje tih veličina i njihovih vrijednosti u tablici olakšava učenicima zaključivanje o tome što se događa s veličinama tj. kako se njihove vrijednosti mijenjaju. Ako fiksiramo vrijednost jedne veličine, vrijednosti ostalih dviju veličina variraju. Pogledajmo tablicu:

Broj kokoši	Broj dana	Broj jaja
1.5	1.5	1.5
3	1.5	3
3	3	6
6	3	12
6	1	4
6	4	16

U prvom i drugom retku fiksiran je broj dana, a broj kokoši i broj jaja variraju u proporcionalnom odnosu. U drugom i trećem retku fiksiran je broj kokoši, a broj dana i broj jaja proporcionalno se mijenjaju. U trećem i četvrtom retku fiksiran je broj dana, pa se opet broj kokoši i broj dana propocionalno mijenjaju itd. Na ovaj način zadatak postaje jednostavan i osnovnoškolcima. Dakle 6 kokoši snesu 16 jaja za 4 dana. Zapravo 1 kokoš snese $\frac{2}{3}$ jajeta za 1 dan.

LITERATURA

1/ J. Cohen Jones (2012.): *Visualizing Elementary and Middle School Mathematics Methods*, John Wiley & Sons, Hoboken, N.J.

2/ D. Ben-Chaim, Y. Keret, I. Bat-Sheva (2012.): *Ratio and Proportion: Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education*, Sense Publishers, Boston.

3/ J. A. Van de Walle, K. S. Karp, J. M. Bay-Williams (2010.): *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Allyn & Bacon, Boston.