

Fleksagoni

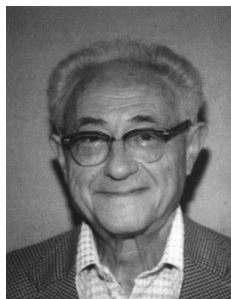
Vesna Ovčina, Zagreb

Fleksagoni (fleksibilni poligoni) su plosnati modeli mnogokuta dobiveni presavijanjem papirnate trake na takav način da osim dviju očiglednih strana, prednje i stražnje, presavijanjem pokazuju i neke skrivene strane, pa čak i njihova različita lica.

Prefiks ispred riječi fleksagon kazuje nam koliko stranica ima poligon. Postoje tetraflexagoni, pentafleksagoni, heksafleksagoni. . .



Heksafleksagone (fleksagone u obliku šesterokuta) sasvim slučajno otkrio je britanski matematičar Arthur Harold Stone 1939. godine. Bio je tada student matematike na američkom sveučilištu Princeton. Dimenzija američkih papira nije odgovarala dimenziji fascikala koje je ponio iz Velike Britanije.



Arthur Harold Stone

Vesna Ovčina, prof. mentor, XV. gimnazija, Zagreb, vesna.ovcina@gmail.com



Stoga ih je Stone prilagodio odrezavši im rub. Tako je dobio velik broj uskih papirnatih trakica. Iz dosade, za zabavu, počeo ih je presavijati na razne načine. . .

To je bio početak jedne nove matematičke priče. Otkrio je triheksafleksagon (šesterokutni fleksagon s trima različitim stranama). S prijateljima Richardom Feynmanom, Bryantom Tuckermanom i Johnom Tukeyem osnovao je "odbor za fleksagone". Proučavali su različite načine presavijanja i međusobne odnose fleksagonovih strana. Nastali su Feynmanov dijagram i Tuckermanova traverza. Cilj im je bio pronaći formulu i prebrojati sve moguće načine na koje se može presaviti heksaheksafleksagon – složenija verzija heksafleksagona sa šest različitih strana.

Svoju popularnost fleksagoni su stekli zahvaljujući Martinu Gardneru, američkom matematičaru i autoru brojnih knjiga iz popularne znanosti i zabavne matematike. On je u razdoblju od 1956. do 1981. godine kroz svoju kolumnu "Matematičke igre" (*Mathematical Games*) koju je uređivao u časopisu *Scientific American* široj populaciji približio fleksagone, tangrame, fraktale itd.

Moj prvi susret s fleksagonima bio je tijekom sudjelovanja XV. gimnazije u Comenius projektu *Geometry in everyday life*. Prilikom prezentacije Hrvatske i Zagreba u Latviji, u rujnu 2012. iskoristili smo fleksagone pri predstavljanju nekih naših poznatih znanstvenika i izumitelja. Učenici su pripremili kratak igrokaz tijekom kojeg su okretanjem fleksagona na njegovim stranama otkrivali fotografije Slavoljuba Penkale, Nikole Tesle, Lavoslava Ružičke i Rudera Boškovića te ih predstavili kratkom pričom o njihovom životu i njihovim izumima.



Projekt se redovito morao prezentirati preko internetskih stranica škole, Županijskih stručnih vijeća i slično. Pojavio se interes za fleksagone pa sam s kolegicom Marinom Ninković održala više radionica o izradi fleksagona na Županijskim stručnim vijećima, na 8. stručno-metodičkom skupu u Puli 2013. te na Večeri matematike u XV. gimnaziji u Zagrebu.

Fleksagoni bi se na sličan način mogli iskoristiti i na redovnoj nastavi u sklopu nekih prezentacija. Mogu poslužiti i kao način zadavanja skrivenih zadataka pa čak i davanja njihovih skrivenih rješenja (tada fleksagon izrađujemo i osmišljavamo mi – profesori), no njima se možemo koristiti i za grupni rad u kojem će na takav način zadatke jedna grupa zadavati drugoj (tada fleksagon izrađuju i osmišljavaju učenici).

Fleksagoni nam također mogu biti samo zabava i relaksacija, mogućnost da na originalan način nekome izjavimo ljubav, simpatiju ili čestitamo Valentinovo.

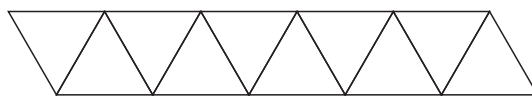
Preokretanjem fleksagona, promatranjem kako iz jedne strane dobivaju drugu i kako ista strana pokazuje svoja različita lica, učenici će podsvjesno promišljati i o topologiji koju za sada uopće ne poznaju...

Što nam je potrebno za izradu fleksagona? Tek malo papira, škare, ljepilo, bojice ili kolaž papir... i malo dobre volje. Napravimo zajedno triheksafleksagon i heksaheksafleksagon.

Triheksafleksagon – upute

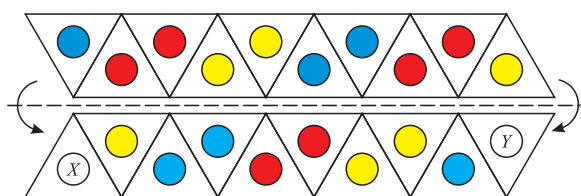
Odaberimo opciju:

- Slažemo fleksagon koji već ima zadane boje svojih strana koje ćemo vidjeti nakon slaganja.
 - Slažemo prazan fleksagon. Nakon toga možemo sami bojiti njegove strane kako želimo i istraživati kako se mijenjaju kada savijamo fleksagon.
- Izrežimo najprije traku iz papira. Kako bi naš fleksagon bio preciznije i ljepše izrađen, možemo unaprijed nacrtati 10 spojenih jednakokraničnih trokuta.



Slika 1.

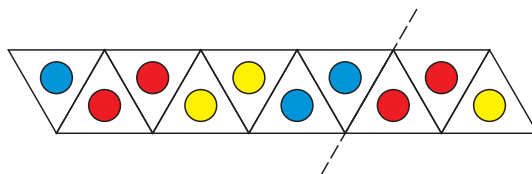
- Izrezanu traku presavijemo po svim linijama – stranicama trokuta.
- Trokutiće na traci označimo bojama kao na slici 2 (ili brojevima 1, 2, 3):



Slika 2.

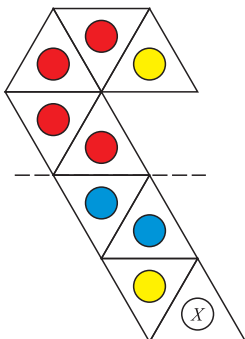
Traku okrenemo i označimo trokutiće i s druge strane, kako je prikazano na slici 2.

- Lijevi dio trake zatim presavijemo po označenom pravcu prema otpramo i dolje kao na slici 3.



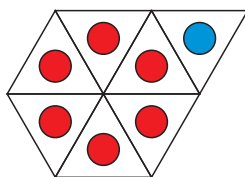
Slika 3.

- 5) Sada vaša traka izgleda ovako:



Slika 4.

- 6) Još jednom presavijimo traku prema otraga i gore (kako je prikazano na slici). Provucimo ju tako da zadnji trokutić dođe iznad trokutića sa žutom točkom. Situacija je sada kao na slici:

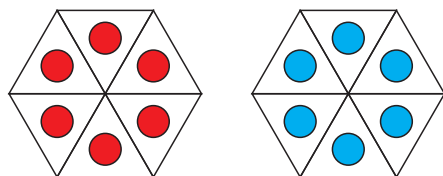


Slika 5.

- 7) Presavijimo na kraju trokutić s plavom točkom prema otraga i zalijepimo plohu X na Y.

Naš fleksagon je gotov! 😊

Vidimo dvije njegove strane, prednju – crvenu i stražnju – plavu.



Slika 6.

Gdje su se sakrile žute točkice?

Pokušajte presaviti triheksafleksagon tako da se pojavi njegova žuta (treća) strana.

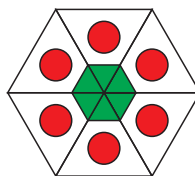
Kako presavijati fleksagon?

Stisnimo ga tako da spojimo zajedno po dva susjedna trokutića. Pravilno smo uparili trokutiće ako

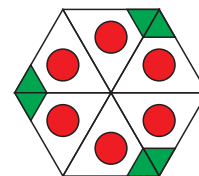
se na suprotnoj strani pojavljuje vrh koji se “otvara poput cvijeta” otkrivajući novu stranu. Zavrtimo ga. . . strane se izmjenjuju. . . crvena – plava – žuta – crvena – plava – žuta. . .

No, ima li svaka njegova strana uvijek isto lice? Nema!

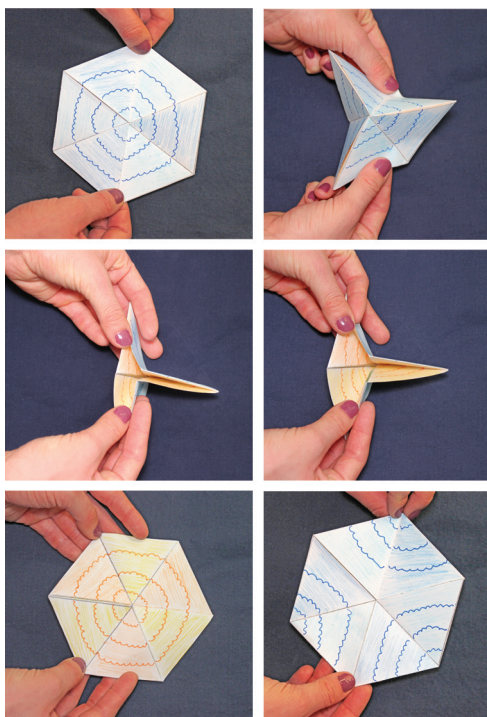
Kako bismo to istražili, obilježimo neku od strana (ili sve tri) nekim prepoznatljivim znakom koji nije simetrično smješten unutar trokutića. Na primjer na crvenoj strani unutar svakog trokutića nacrtajmo novi zeleni trokutić kao na slici 7. Nakon presavijanja, kad crvena strana postane donja, pokazat će svoje drugo lice, kao na slici 8.



Slika 7.

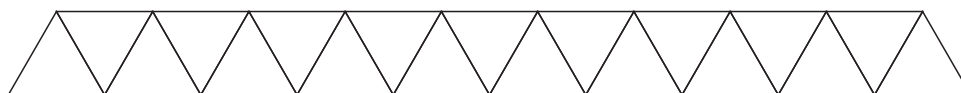


Slika 8.



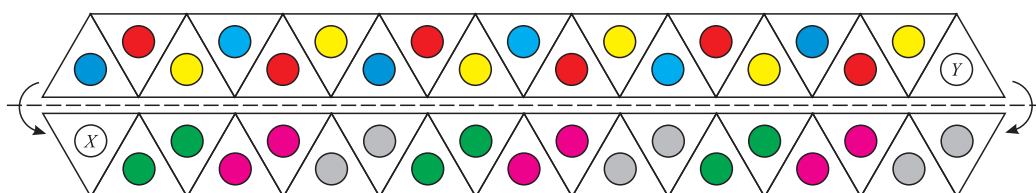
Heksaheksafleksagon – upute

- 1) Potrebne su nam dvije trake papira poput one prikazane na slici 1 koje ćemo spojiti u jednu dulju traku (tako da zalijepimo prvi trokutić jedne na prvi trokutić druge trake) ili odmah napravimo jednu veću traku od 19 jednakostraničnih trokutića.



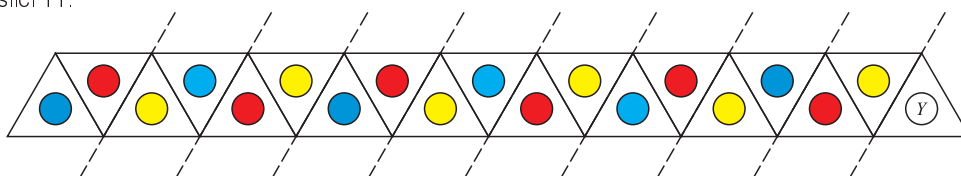
Slika 9.

- 2) Izrezanu traku presavijemo po svim linijama.
- 3) Trokutiće na traci označimo bojom (ili brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6), kao na slici 10:



Slika 10.

- 4) Traku "omotajmo" samu oko sebe, presavijajući ju prema otraga po iscrtkanim pravcima kako je prikazano na slici 11:



Slika 11.

- 5) Nakon toga izgled naše (dvostruke) trake trebao bi biti kao na slici 1.
- 6) Dalje nastavljamo pratiti upute za slaganje triheksafleksagona.
- 7) Naš heksaheksafleksagon je gotov!

Pokušajmo pronaći svih 6 njegovih strana. Prve tri strane pronalazimo lako, ostale malo teže i ne okreću se sve jednako često pri svim savijanjima. Kada ih sve uspijemo pronaći izazov nije gotov, igra tek počinje. Triheksafleksagon nam je pokazao po dva različita lica svojih triju strana, a heksakseksafleksagon ih teoretski ima 18, no bez rezanja, samo presavijanjem ih je moguće pronaći 15. Dobru zabavu!

LITERATURA

- 1/ http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/focus/Gardner.Hexaflexagons12_1956.pdf
- 2/ <http://slideplayer.com/slide/7475855>
- 3/ <https://prezi.com/jfymwd9wkt9-/the-mathematical-mystery-of-flexagons/>
- 4/ <https://laughingsquid.com/hexaflexagons-a-fascinating-video-by-mathemusici-an-vi-hart/>
- 5/ <https://www.youtube.com/watch?v=vHqascRzh0g>
- 6/ <https://www.youtube.com/watch?v=gRg8cEK4Dms>