Rizik od bankrota u jednostavnim igrama

Igor Lulić, Rijeka

Rizik od bankrota je vjerojatnost da ćemo bankrotirati, odnosno vjerojatnost da ćemo izgubiti svu svotu novca s kojom raspolažemo na početku neke igre. Za jednostavne igre ta se vjerojatnost nekad može izračunati bez korištenja složenijih matematičkih alata. U ovom članku izračunat ćemo rizik od bankrota za neke jednostavne igre i dati ideju kako izračunati rizik od bankrota u nešto složenijim igrama.

Uvod

Zamislimo igru bacanja novčića u kojoj, ovisno o ishodu bacanja, dobivamo ili gubimo novac: ako padne glava, dobivamo tri kune, a ako padne pismo, gubimo jednu kunu. To znači da postoji $50\ \%$ šanse da ćemo dobiti tri kune, te $50\ \%$ šanse da ćemo izgubiti jednu kunu. Zvuči kao igra koju se isplati igrati. Promotrimo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} 50\ \% \cdot 3 + 50\ \% \cdot (-1) &= 50\ \% \cdot (3-1) \\ &= 50\ \% \cdot 2 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Navedena igra ima dva moguća ishoda, $+3$ i -1. Svaki ishod pomnožili smo s pripadnom vjerojatnošću i zbrojili smo dobiveno. Rezultat koji smo dobili ovom operacijom zove se **očekivanje igre**. Iz gornjeg izraza vidimo da je očekivanje spomenute igre s novčićem jedna kuna. Igrač će, u prosjeku, svakim bacanjem u ovoj igri zaraditi jednu kunu. To znači da je nakon 50 bacanja očekivana zarada 50 kuna, nakon 100 bacanja 100 kuna itd.

Ako očekivanje igre nije pozitivan broj, onda je očito da nam se danu igru matematički ne isplati igrati. No ako je očekivanje pozitivan broj, onda smo stekli jedan preduvjet da igra postane isplativa za igranje. Postoje još neka važna pitanja. S koliko novca započinjemo igru? Koliki je rizik od bankrota s obzirom na taj početni iznos? Uz koliki rizik od bankrota smo spremni igrati igru?

Igor Lulić, prof., Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, `igorlulic13@gmail.com`

Rizik od bankrota

Kakve igre uzimamo u obzir?

Navedimo prvo svojstva koja moraju imati sve igre koje ćemo razmatrati:

1. igra ima konačno mnogo ishoda
2. svaki pokušaj je nezavisan u odnosu na prethodne
3. na početku igre imamo određenu svotu novca
4. novac s kojim raspolažemo mijenja se ovisno o ishodu svakog pokušaja
5. igru ponavljamo beskonačno, ili dok ne bankrotiramo.

Primijetimo da uvodna igra s novčićem zadovoljava navedena svojstva – svako bacanje ima dva moguća ishoda i ne ovisi o prethodnim bacanjima. Kad bismo igru započeli jednom kunom, nakon prvog bacanja imali bismo ili četiri kune ili bismo bankrotirali. Zanima nas vjerojatnost da će se za vrijeme igre dogoditi bankrot. Zato je potrebno definirati funkciju koja će svakom početnom iznosu pridružiti vjerojatnost da ćemo bankrotirati.

Funkcija rizika od bankrota

Neka je $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow [0, 1]$ funkcija rizika od bankrota. Rizik od bankrota ovisi o početnom iznosu za koji znamo da je neki strogo pozitivan broj pa je domena funkcije f skup $\langle 0, +\infty \rangle$. Znamo i da je rizik od bankrota vjerojatnost, pa je kodomena te funkcije skup $[0, 1]$. Može se pokazati da vrijedi

$$f(x) = [f(1)]^x. \tag{2}$$

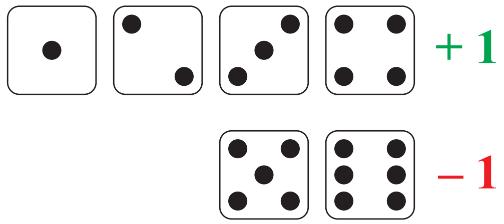
Dakle, da bismo izračunali rizik od bankrota za bilo koji početni iznos, potrebno je izračunati rizik od bankrota od jedne jedinice. Zato se svaki problem računanja rizika od bankrota svodi na određivanje vrijednosti $f(1)$ za danu igru.

Izdvajamo važno svojstvo funkcije rizika od bankrota. Za sve početne iznose x i y vrijedi

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y). \tag{3}$$

Navedenim svojstvom često se koristimo prilikom traženja rizika od bankrota u različitim igrama.

Zadatak 1. *Bacamo simetričnu kockicu. Dobivamo jednu kunu ako padne bilo koji broj osim petice i šestice, no ako padnu petica ili šestica, gubimo jednu kunu. Odredite $f(1)$ za ovu igru.*



Od šest mogućih ishoda bacanja kockice, četiri ishoda donose zaradu od jedne kune, dok dva ishoda donose gubitak od jedne kune. To znači da ako igru započnemo jednom kunom, postoji $\frac{2}{3}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja imati dvije kune, odnosno $\frac{1}{3}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja bankrotirati. Stoga vrijedi:

$$f(1) = \frac{2}{3} \cdot f(2) + \frac{1}{3} \cdot f(0).$$

Ovaj postupak zove se i **analiza prvog koraka**. Za rizik od bankrota vrijedi da je jednak očekivanoj vrijednosti rizika od bankrota nakon jednog koraka. Slično kao kad smo u uvodnom primjeru računali očekivanje igre, sve rizike od bankrota za moguće iznose nakon jednog bacanja kockice pomnožimo s pripadnim vjerojatnostima i zbrojimo dobiveno.

Očito je $f(0) = 1$, a zbog izraza (3) vrijedi $f(2) = f(1) \cdot f(1)$, pa imamo:

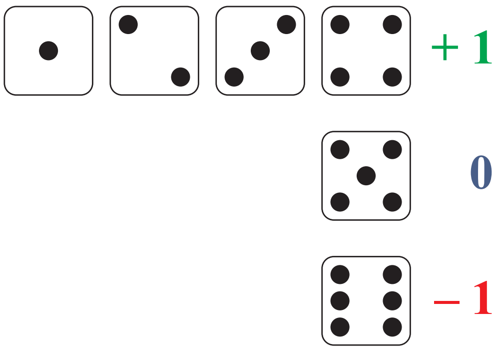
$$f(1) = \frac{2}{3} \cdot [f(1)]^2 + \frac{1}{3}.$$

Supstitucijom $x = f(1)$ i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x = 1$ i $x = \frac{1}{2}$. Poznato je da je $f(1) = 1$ rješenje za igre s negativnim očekivanjem. Slijedi da je rješenje dane igre $f(1) = \frac{1}{2}$. Drugim riječima, ako krenemo igrati navedenu igru s jednom kunom, vjerojatnost da ćemo bankrotirati je $50\ \%$, a funkcija rizika od bankrota je oblika $f(x) = \frac{1}{2^x}$.

Zadatak 2. *Bacamo simetričnu kockicu. Dobivamo jednu kunu ako padnu jedinica, dvojka, trojka ili četvorka, ostajemo na istom iznosu ako padne petica, te gubimo jednu kunu ako padne šestica. Odredite $f(1)$ za ovu igru.*



Napravimo opet analizu prvog koraka. Ako igru započnemo jednom kunom, tad postoji $\frac{2}{3}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja imati dvije kune, $\frac{1}{6}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja imati jednu kunu, odnosno $\frac{1}{6}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja bankrotirati. Vrijedi:

$$f(1) = \frac{2}{3} \cdot f(2) + \frac{1}{6} \cdot f(1) + \frac{1}{6} \cdot f(0).$$

Primijenimo ponovno izraz (3), napravimo supstituciju $x = f(1)$ i sredimo dobiveni izraz. Imamo:

$$4x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x = 1$ i $x = \frac{1}{4}$. Prvo rješenje odbacujemo, pa nam ostaje $f(1) = \frac{1}{4}$. Ako navedenu igru krenemo igrati s jednom kunom, vjerojatnost da ćemo bankrotirati je $25\ \%$, a funkcija rizika od bankrota je oblika $f(x) = \frac{1}{4^x}$.

Zadatak 3. *Bacamo dva simetrična novčića. Dobivamo jednu kunu ako se pojavi bilo koji ishod osim dva pisma, te gubimo jednu kunu ako padnu dva pisma. Odredite $f(1)$ za ovu igru.*

Ako igru započnemo jednom kunom, postoji $\frac{3}{4}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja imati dvije kune, te $\frac{1}{4}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja bankrotirati. Vrijedi:

$$f(1) = \frac{3}{4} \cdot f(2) + \frac{1}{4} \cdot f(0).$$

Primjenom izraza (3), supstitucijom $x = f(1)$ i sređivanjem dobivamo:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x = 1$ i $x = \frac{1}{3}$. Nakon odbacivanja prvog rješenja, ostaje nam rješenje $f(1) = \frac{1}{3}$. Dakle, ako navedenu igru započnemo jednom kunom, vjerojatnost da ćemo bankrotirati je približno $33.33\ \%$. Funkcija rizika od bankrota je oblika $f(x) = \frac{1}{3^x}$.

Pokušajmo sada riješiti i uvodni problem. Pokazat će se da do rješenja ne možemo doći na jednostavan način.

Zadatak 4. *Bacamo simetričan novčić. Dobivamo tri kune ako padne glava, ali gubimo jednu kunu ako padne pismo. Odredite $f(1)$ za ovu igru.*

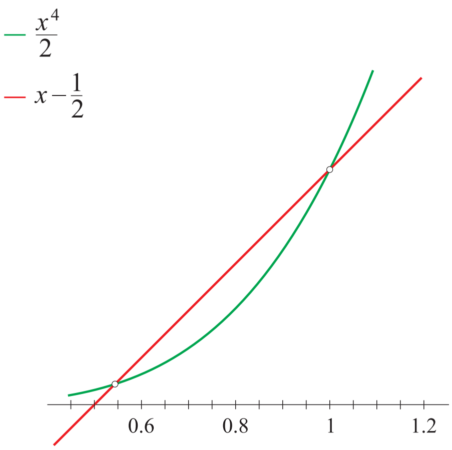
Ako igru započnemo jednom kunom, postoji $\frac{1}{2}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja imati četiri kune, te $\frac{1}{2}$ šanse da ćemo nakon prvog bacanja bankrotirati. Vrijedi:

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot f(4) + \frac{1}{2} \cdot f(0).$$

Izraz (3) nam daje $f(4) = f(1)f(1)f(1)f(1)$. Supstitucijom $x = f(1)$ i sređivanjem dobivamo:

$$\frac{1}{2}x^4 = x - \frac{1}{2}.$$

Ne postoji jednostavan način za riješiti ovu jednadžbu. Na slici možemo vidjeti grafičko rješenje, odnosno sjecišta krivulja s lijeve i desne strane jednadžbe.



Vidimo da se i ovdje pojavilo rješenje $x = 1$. Za drugo rješenje vrijedi $x \approx 0.5437$, što znači da je za ovu igru $f(1) \approx 0.5437$, odnosno da je vjerojatnost da ćemo bankrotirati, ako igru započnemo jednom kunom, približno $54.37\ \%$.

Kad analizom prvog koraka ne dobijemo jednostavnu jednadžbu nižeg stupnja, do rješenja možemo doći uporabom jednog od matematičkih programa. No tim postupkom u svakom slučaju dolazimo korak bliže traženom riziku od bankrota.

Jednom kad izračunamo $f(1)$ i odredimo funkciju rizika od bankrota za neku igru, možemo postaviti i obratno pitanje: s koliko novca trebamo započeti igru ako ne želimo imati rizik od bankrota veći od, recimo, $1\ \%$? Odgovor na ovo pitanje daje rješenje jednadžbe

$$f(x) = \frac{1}{100}. \qquad (4)$$

Za primjer uzmimo prvi zadatak s bacanjem simetrične kockice. Uvrštavanjem poznatih vrijednosti imamo redom:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^x} &= \frac{1}{100}, \\ 2^x &= 100, \\ x &= \log_2 100, \\ x &\approx 6.64. \end{aligned}$$

Dakle, želimo li igrati igru iz prvog zadatka tako da nam rizik od bankrota bude najviše $1\ \%$, početni iznos nam treba biti barem 7 kuna (zbog prirode igre, dovoljno je zaokružiti rješenje jednadžbe na prvi veći cijeli broj).

LITERATURA

1/ Bill Chen, Jerrod Ankenman (2006.): *The Mathematics of Poker*, ConJelCo LLC.