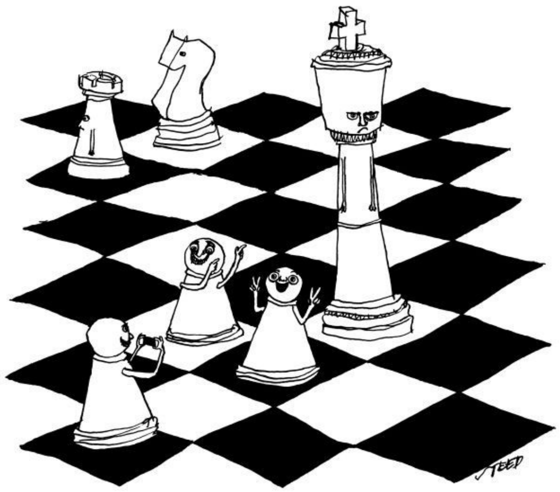
Magični kvadrati – čarolija u šahu



Siniša Režek, Zagreb

Konstanta 34 zbroj je brojeva svakog retka, stupca i dijagonale magičnog kvadrata – to svi znaju. Ali to nije sve! Ta se čarobna konstanta u magičnom kvadratu krije na još 40-ak mjesta. Koji još brojevi daju zbroj 34, otkrit ćemo s pomoću triju šahovskih figura: skakača, kralja i topa.

Izraz "aritmetička čarolija" uveli su u teoriju magičnih kvadrata francuski matematičari Arnoux, Riollot i Cazalas. Oni pod tim podrazumijevaju osnovno svojstvo magičnog kvadrata da zbroj brojeva na bilo kojoj vertikali, horizontali ili centralnoj dijagonali daje uvijek isti zbroj, zvan konstanta.[1]

Postoji puno raznih metoda za sastavljanje magičnih kvadrata. Najlakša je za početnike ona koja polazi od popune kvadrata s prvih 16 prirodnih brojeva. Evo kako izgleda kvadrat 4×4 redom popunjen prirodnim brojevima od 1 do 16:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Da bi ovaj kvadrat postao magičan, potrebno je unakrsno zamijeniti brojeve 2 i 15, 3 i 14, 5 i 12, 9 i 8. Poslije te jednostavne radnje, kvadrat će izgledati ovako:

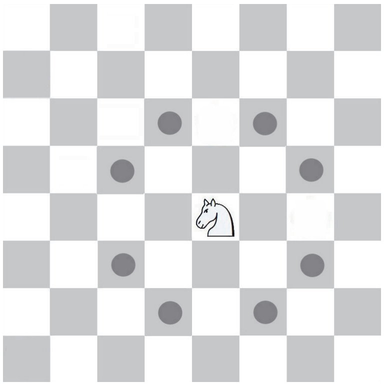
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Lako je ustanoviti da je magična konstanta ovog kvadrata 34. Jasno je da se taj zbroj pojavljuje ukupno 10 puta, i to 4 puta u horizontalnom, 4 puta u vertikalnom i 2 puta u dijagonalnom smjeru. Međutim, zanimljivo je da se konstanta 34 može dobiti na još 40-ak načina! Njih ćemo otkriti promatranjem kretanja nekih šahovskih figura po magičnom kvadratu.

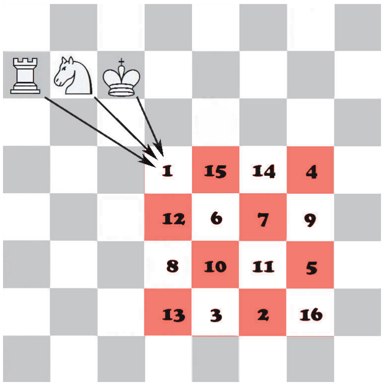
Siniša Režek, prof. mentor, OŠ Žitnjak, Zagreb, srezek@gmail.com

[1] Što su magični kvadrati i koja sve zanimljiva svojstva imaju detaljnije pročitajte u MiŠ-u 26 [1].

Prva 4 zbroja koja daju istu konstantu 34 dovode se u vezu s kretanjem šahovskog skakača. Prisjetimo se kako se kreće skakač. Skakač se može kretati do jednog od polja najbližih onom na kojem stoji, ali koje nije u istom redu, stupcu ili na dijagonali:



Moguća dolazna polja skakača primjerice s polja e4



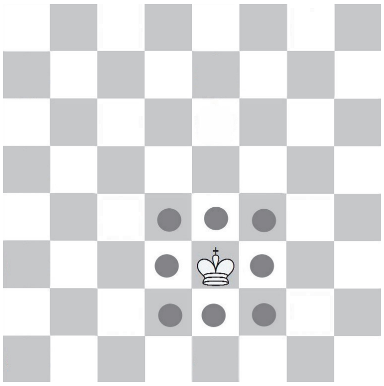
Primjer u kojem top, skakač ili kralj kreću s polja d5

Ako skakač krene primjerice s polja **d5** šahovnice na kojoj smo smjestili broj 1 magičnog kvadrata, pa preko brojeva 10 (polje **e3** šahovnice) i 16 (polje **g2** šahovnice) skoči na polje **f5** šahovnice s brojem 7, ti brojevi tvore jedan romb u kvadratu i ostvaruju konstantu, jer je $1+10+16+7 = 34$. Drugi romb dobiva se skokovima $4 + 6 + 13 + 11 = 34$. Još dvije magične staze skakača nastaju i ovim potezima: $3 + 5 + 14 + 12 = 2 + 9 + 15 + 18 = 34$. Uočimo da brojevi u svakom zbroju predstavljaju vrhove kvadrata – kažemo da čine kvadratnu konstelaciju.

Konstanta 34 proizlazi i iz kvadratne konstelacije kutnih brojeva 1, 4, 16 i 13, ali i iz one centralnih brojeva 6, 7, 11 i 10, kao i iz kvadratne konstelacije svakog od četiriju kvadranata magičnog kvadrata. Ako se upitamo imaju li i te navedene kvadratne konstelacije brojeva možda veze s kretanjem nekih šahovskih figura po magičnom kvadratu, odgovor je – da, imaju!

Jasno je bez daljnjega da je kvadrat dimenzije 4×4 s vrhovima $1 - 4 - 16 - 13$ zapravo magična staza topa. Kraće magične kvadratne staze topa čine i navedeni vrhovi malih 2×2 kvadrata: $6+7+11+10 = 1+15+6+12 = 14+7+9+4 = 8 + 10 + 3 + 13 = 11 + 5 + 16 + 2 = 34$.

Jasno je također da vrhovi tih malih kvadrata istovremeno tvore i magične staze kralja. Prisjetimo se kako se kreće kralj. Kralj se kreće do susjednog polja koje nije napadnuto jednom ili više protivničkih figura:

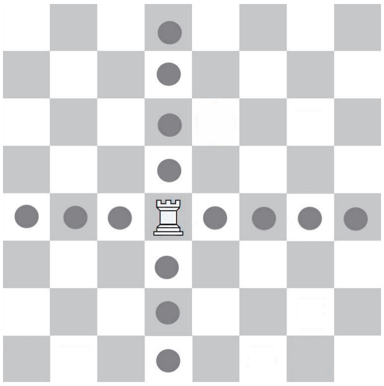


Moguća dolazna polja kralja primjerice s polja e3

Kralj radi naizmjenično ravne i kose poteze i prelazi brojeve malih kvadrata, npr. $1 + 12 + 15 + 6 = 6+7+10+11 = 14+4+7+9 = 11+2+5+16 = 13 + 10 + 3 + 8 = 34$.

Primijetimo još da postoje i magične konstelacije brojeva u obliku kvadrata srednjeg tipa, odnosno kvadrata dimenzije 3×3: $1 + 14 + 11 + 8 = 4+5+10+15 = 13+2+7+12 = 16+9+6+3 = 34$. I njih možemo prikazati kao magične staze topa, koji osim kvadratnih, može ostvariti još i pravokutne staze sa istom konstantom, i to ovako: $15 + 14 + 2 + 3 = 12 + 9 + 5 + 8 = 34$.

Prisjetimo se kako se kreće top. Top se može kretati do bilo kojeg polja na liniji ili redu na kojima stoji:



Moguća dolazna polja topa primjerice s polja d4

Kraće pravokutne magične staze topa su ove: $1+14+7+12 = 4+9+6+15 = 13+2+11+8 = 16+5+10+3 = 34$.

Kralj radi prave magične staze nepravilnog oblika: $3+10+7+14 = 2+11+6+15 = 8+10+7+9 = 12+6+11+5 = 34$!

Postoje i druge magične staze kralja: $1+12+10+11 = 4+9+11+10 = 13+8+6+7 = 16+5+7+6 = 1+15+7+11 = 4+14+6+10 = 13+3+11+7 = 16+2+10+6 = 34$. Sve u svemu ima 17 magičnih staza kralja i 20 staza topa.

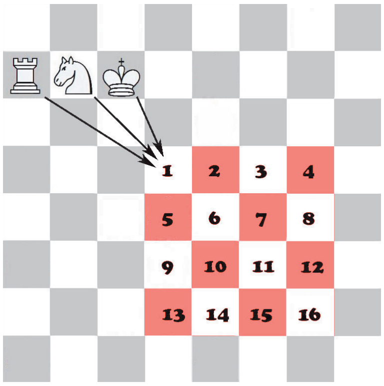
Šahovska čarolija postoji i u običnom kvadratu ispunjenom redom sa prvih 16 prirodnih brojeva. Izraz “šahovska čarolija” nastao je iz izraza “aritmetička čarolija”, a označava mogućnost kretanja šahovskih figura po mreži brojeva magičnog ili prirodnog kvadrata tako da se dobivaju magične staze – staze kod kojih je zbroj brojeva koji je čine uvijek ista, magična konstanta. Primjerice, magični kvadrat je smješten unutar polja **d5** šahovnice na kojoj smo smjestili broj 1 magičnog kvadrata, pa sve do polja **g2** šahovnice na kojoj smo smjestili broj 16.

Evo nekoliko magičnih staza u prirodnom kvadratu za svaku od spomenutih šahovskih figura:

skakač: $1+10+16+7 = 4+6+13+11 = 5+3+12+14 = 5+3+12+14 = 9+2+8+15 = 34$,

kralj: $14+10+7+3 = 15+11+6+2 = 5+6+11+12 = 9+10+7+8 = 6+7+10+11 = 2+7+11+14 = 3+6+10+15 = 5+10+11+8 = 9+6+7+12 = 34$,

top: $1+4+16+13 = 6+7+11+10 = 2+3+15+14 = 5+8+12+9 = 13+9+10+2 = 16+12+4+2$.



Primjer u kojem top, skakač ili kralj kreću s polja d5

Kako je moguće da i prirodni i magični kvadrat dimenzije 4×4 sadržavaju skoro identične magične staze šahovskih figura? Razlog tome je što oba kvadrata imaju istovjetnu grafičku strukturu u smislu potpune simetrije svih parova brojeva oko centralne matematičke točke: $1+16 = 13+4 = 10+7 = 6+11 = 5+12 = 9+8 = 2+15 = 3+14 = 17$. Ovaj istovjetni zbroj zove se “mala konstanta”, a prema njoj se određuje grafička struktura magičnog kvadrata. Postoji 880 raznih magičnih kvadrata dimenzije 4×4, koji se mogu rasporediti u 12 različitih grafičkih struktura.

LITERATURA

1/ T. Debelec i S. Gračan (2004): *Magični kvadrati – čarolija u brojevima*, MiŠ 26.

2/ Wilhelm Ahrens (1902): *Mathematische Spiele*.

3/ Frénicle de Bessy (1693): *Des quarrez ou tables magiques*.